14 3

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

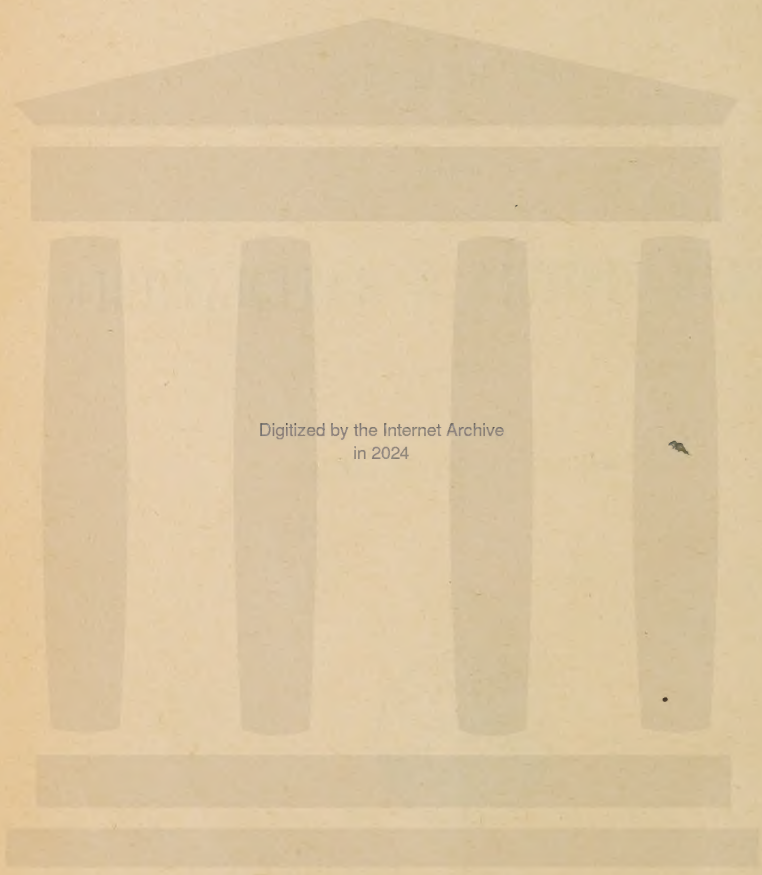
DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Q
54
N23
ser.4
v.7-8
1937-38

SERIE IV. — VOL. VII. — (Anno LXXVI)

NAPOLI
S. I. E. M. - Stabilimento Industrie Editoriali Meridionali
S. Giovanni Maggiore Pignatelli, 2
1937 - XV



Digitized by the Internet Archive
in 2024

https://archive.org/details/accademia-delle-scienze-fisiche-e-matematiche-rendiconto_january-october-1937_7

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. VII — (Anno LXXVI)

Gennaio - Ottobre 1937 (XV)

NAPOLI
S. I. E. M. - STABILIMENTO INDUSTRIE EDITORIALI MERIDIONALI
S. Giovanni Maggiore Pignatelli, 2
1937 - XV

Pubblicato il dì 29 novembre 1937 - XVI

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE DI NAPOLI

DURANTE L'ANNO 1936 (XIV)

letta nell'adunanza del dì 6 febbraio 1937 (XV)

dal socio segretario **Geremia D'Erasmo**

Se nello scorso anno le prime parole di questa breve relazione — letta mentre una coalizione di 52 Stati tentava di soffocare economicamente la Nazione, rea soltanto di voler portare la civiltà ove per lunghi secoli aveva dominato la barbarie schiavista — non mancarono di esprimere la salda fede nei destini della Patria, quest'anno il vostro Segretario adempie più lietamente il suo dovere, dopo che l'Italia ha già conquistato, mercè il valore delle truppe, l'abilità dei comandanti, lo spirito di sacrifizio del popolo, un Impero, e mentre si rivolgono a questo le cure dei governanti e l'attenzione degli studiosi e si moltiplicano le missioni scientifiche, umanitarie e sociali per imprimere ai nuovi territori italiani, con le feconde opere di pace, i segni indistruttibili della civiltà romana e fascista.

La nostra Accademia, che ha seguìto con palpitante interesse le vicende della guerra italo-etiopica ed ha esultato per il completo trionfo delle armi italiche, ha continuato a svolgere, durante il 1936, la sua normale attività, qui appresso brevemente riassunta.

Il Rendiconto (280 pagine, con nove tavole e otto fig. interc.) ha accolto 28 note di soci e di estranei, una commemorazione e la consueta relazione del Segretario sui lavori dell'anno precedente.

Cominciando dalle ricerche astronomiche, sono da segnalare due note del socio corrispondente L. Carnera, nella prima delle quali vengono esposti i risultati delle osservazioni fatte, durante l'*Ecclisse totale di luna del 18 gennaio 1936*, nel R. Osservatorio Astronomico di Capodimonte, e particolarmente gli istanti di alcune occultazioni stellari e dei passaggi dell'ombra in alcuni particolari punti del disco lunare; mentre la seconda riguarda la ricerca di opportune *Coppie di stelle per lo studio dei micrometri*, ricerca ispirata dalla necessità di avere un mezzo atto a determinare il valore del

passo del micrometro in modo unico ed uniforme per tutte le stazioni internazionali per lo studio delle variazioni di latitudine, e consistente in una scelta di 65 coppie stellari, che potendo essere utilmente osservate con vari strumenti ed in diversi osservatorii, in qualsiasi parte del mondo essi si trovino, rappresentano una base uniforme di controllo per i valori angolari dei micrometri. Nello stesso campo di studi, vennero accolte tre note della dott. M. Viaro: la prima si riferisce alla ricerca definitiva degli elementi della *Cometa 1910-IV,* scoperta visualmente da Metcalf e seguìta da vari osservatori dall'agosto 1910 al giugno 1911, per la quale viene trovata una orbita ellittica molto allungata; la seconda riporta 13 ascensioni rette del pianeta Urano e 15 del pianetino Cerere, determinate fra l'ottobre 1934 e il marzo 1935 allo strumento dei passaggi di Bamberg; e la terza dà conto della determinazione di 24 ascensioni rette del pianeta Giove, analogamente eseguite nel giugno e nel luglio 1936.

Passando agli studi delle matematiche pure, vanno anzitutto ricordate tre note del socio corrispondente G. Andreoli. In una, dal titolo *Coppie di variabili mutuamente casuali,* egli completa un concetto, che può avere sviluppi nella teoria della probabilità e nella statistica e che si collega da un lato alla teoria delle matrici, dall'altro (nel caso di variabili continue) a quelle di certe equazioni di composizione non lineari; in una seconda, sopra gli *Elementi intrinseci nelle varietà,* prospetta la possibilità di una estensione metodica ed uniforme alle varietà, mostrando la convenienza di usare, nell'analisi intrinseca delle curve, elementi diversi dagli abituali, raggio di curvatura e lunghezza d'arco; nella terza, infine, occupandosi dei *Criteri di convergenza delle serie,* prende in esame il caso nel quale un criterio di convergenza per una serie non permette di affermare nè la convergenza nè la divergenza di essa serie, e deduce la possibilità di costruire scale di criteri in modo diverso da quello abituale.

Fra i lavori presentati da estranei nel medesimo campo, spettano alla prof. A. Rocco-Boselli due note riguardanti la *Costruzione di forme invariantive di forme binarie,* di primo, di secondo e di terzo grado, rispetto ad alcune forme gruppali di 1.°, 2.° e 3.° grado; al prof. L. Toscano altre due note sopra *Successioni ricorrenti e polinomi di Bernoulli e di Eulero* e *Su alcuni determinanti dedotti da quello di Vandermonde;* al prof. G. Barba una nota *Sulla definizione di funzioni egualmente singolari del Pincherle;* e al prof. G. Palamà un lavoro *Su alcune formule dell'algebra delle successioni e sullo sviluppo di alcuni determinanti.*

Continuando le proprie ricerche sulla cinematica della figura piana deformabile di area costante che si muove mantenendosi affine a sè stessa, il socio corrispondente Mario Pascal si è posto il problema di cercare una costruzione che permetta, così come si fa nella cinematica della figura rigida, di trovare il *centro di curvatura delle traiettorie dei punti della figura mobile,* ed ha esposto, in una nota, i risultati da lui conseguiti in questo

senso mediante due costruzioni, una delle quali si presenta particolarmente interessante in quanto è applicabile, con le debite modificazioni formali, al caso della figura rigida, fornendo così una costruzione del centro di curvatura delle traiettorie, che non ha bisogno della conoscenza dei centri di curvatura della base e della rulletta.

In un altro importante campo di ricerche, che interessano in sommo grado il progresso dell'alta tecnica, il consocio Picone, direttore dell'Istituto per le applicazioni del Calcolo, ha esposto un nuovo metodo di calcolo, da lui definito *variazionale*, per *l'analisi quantitativa dei problemi di propagazione*, prendendo in considerazione una formulazione molto generale dei problemi vibratori dei corpi elastici a tre dimensioni. Tale metodo ha già trovato pratica applicazione sia nei problemi dinamici, dai quali è stato imposto, che in quelli statici, permettendo di conseguire le richieste soluzioni con calcoli di rapida esecuzione.

Utili contributi alla soluzione di problemi tecnici, che riguardano la scienza delle costruzioni, rappresentano le due note del prof. F. Jossa e del dott. A. Linari: la prima delle quali studia il comportamento *di alcuni cavalletti sollecitati a torsione*, mentre l'altra riguarda i calcoli statici delle *travi in cemento armato con mensole*, tenendo conto della effettiva variazione del momento di inerzia.

Da questi problemi tecnici ci riporta a problemi essenzialmente economici il socio corrispondente G. Gallucci, il quale, in due distinte note sopra *Il paradosso di Carlyle* e *Su l'economia dinamica*, premessa la critica dei concetti di lavoro sociale e valore economico e definito il « potenziale del valore economico », ha esposto un primo tentativo di sostituire ad un modello meccanico un modello elettrodinamico: interpretazione economica delle note leggi fisiche di Ohm e di Kirchoff.

Tali ricerche richiamano, per quanto indirettamente, i problemi statistici, dei quali ha trattato, in tre successivi lavori, il dott. G. De Meo, investigando primieramente *sulle cause di morte nella popolazione italiana ed in una collettività di assicurati sulla vita*; quindi calcolando *l'attrazione matrimoniale per stato civile in Italia*, ed infine analizzando l'andamento dell'*attrazione per alfabetismo* degli sposi nel nostro Paese.

Trattando ora dell'attività dell'altra Sezione della nostra Accademia, ricordiamo due note del socio G. D'Erasmo, in una delle quali egli spiega l'origine di un caratteristico rivestimento, generalmente fatto da rilievi e solchi concentrici, che presentano alcuni lamellibranchi del Cretaceo superiore del Gargano e che, pur simulando avanzi di organismi fossili, viene invece attribuito all'azione incrostante di acque mineralizzate; mentre nella seconda studia, con la collaborazione del prof. Penta, la costituzione, i caratteri e la probabile genesi di una roccia silicea recentemente rinve-

nuta nel sottosuolo di Minervino Murge, intercalata al calcare cretaceo e finora non segnalata dagli autori.

A ricerche mineralogiche si riferisce la nota del dott. A. Schiano *Su di una miscela salina fluita alla base del conetto eruttivo nel cratere del Vesuvio* nel febbraio 1936, la quale dà conto dei risultati analitici dimostranti la presenza di circa 75 % molecolare di silvite e 25 % di alite, ed inoltre di altri cloruri, fra cui i minerali rinneite, scacchite ed il cloruro ramico anidro. Nel campo vulcanologico è da segnalare la nota del prof. A. Parascandola, che, trattando della *trachite sanidinica vitrofirica della Punta della Lingua nell' isola di Procida* e paragonando i dati chimici e geologici di questa roccia con quelli rilevabili su altre consimili di vari centri eruttivi dei Campi delle Isole Flegree, dimostra le strette analogie di struttura e di giacitura esistenti fra la trachite della Lingua ed il piperno, concludendo che, come fu ammesso dal Dell'Erba e da altri autori per quest' ultimo, anche la trachite nera, ad aspetto di colata lavica, dell' isola di Procida può essere stata originata per atto eruttivo di indole piroclastica.

Infine i fenomeni del vulcanismo dell' isola d' Ischia sono stati passati in rassegna dalla prof. G. Algranati, che ne ha studiato i rapporti con la formazione dei centri abitati e con la variazione della popolazione, ammettendo una prevalente influenza delle eruzioni ed una pur notevole importanza dei terremoti nel determinare la topografia e lo spostamento degli abitati, rispetto alla più scarsa influenza del bradisismo e delle sorgenti termali.

Oltre a questa attività, comprovata dai precedenti lavori accolti per la stampa, parecchi colleghi hanno con varie comunicazioni verbali richiamato l' attenzione dell' Accademia sopra recenti risultati di personali ricerche o sulle attualità di maggiore interesse: basta ricordare, tra gli altri, il socio Marcolongo, che ha fatto rilevare le curiose analogie tra un' opera poco conosciuta di G. B. Della Porta e le ricerche di Leonardo da Vinci sulla quadratura di alcune lunule; il socio Longo, che, riferendo sopra l' attività della Stazione sperimentale per le piante officinali da lui diretta, ha messo in rilievo i risultati delle recenti *Ricerche farmacologiche sul boldo e sulla canapa indiana*; e il socio Diamare, che, partecipando la morte di Guglielmo Romiti, ne ha voluto ricordare i principali meriti scientifici nel campo delle discipline anatomiche.

Abrogato, con disposizione Ministeriale, il precedente ordine di sospensione dei concorsi a premio, l'Accademia ha riaperto, con le norme in vigore, tutti i concorsi precedentemente banditi, opportunamente modificandone le date di scadenza. Si chiudono, nel corrente anno 1937, i concorsi al premio Gabriele e Ruggiero Torelli, al premio Sementini e al premio accademico del biennio 1935-36 sul tema « *Studio dello spazio funzionale relativo ai*

polinomi definiti di un dato grado »; mentre scade nel gennaio 1938 il quarto concorso al premio Agostino Oglialoro Todaro. Inoltre, per incarico della R. Accademia Pontaniana di Scienze Morali e Politiche, l'Accademia ha giudicato il concorso al premio De Mellis, bandito il 20 marzo 1934 dalla cessata Accademia Pontaniana e chiuso il 31 dicembre di quell'anno, sul tema: «*Contributo alla conoscenza delle glandole endocrine negli invertebrati* », assegnando la somma disponibile di L. 1000.— all'unico concorrente, autore di una memoria manoscritta sopra le glandole endocrine degli Artropodi, e specialmente degli Insetti, che è risultato essere il dott. De Lerma Baldassarre, aiuto nel R. Istituto Zoologico di Napoli.

Mentre in tal modo l'attività accademica si ripristina anche in questo settore, premiando i giovani migliori ed incoraggiandoli alla ricerca scientifica, è d'altra parte certo che nuovo incremento alle nostre pubblicazioni deriverà dal generoso sussidio annuale che la benemerita Direzione generale del Banco di Napoli continua a largire per la stampa delle memorie destinate alla inserzione negli Atti.

Se questa, sia pur modesta ma ininterrotta attività — la quale ha rappresentato, in un lungo e glorioso passato, e continua tuttora a rappresentare il principale centro di cultura per le discipline matematiche e naturali nell'Italia meridionale — giustamente rallegra quanti hanno a cuore il decoro e il prestigio della vecchia nostra Accademia, vivamente ci addolora e ci turba il pensiero, che ogni anno più si assottiglia la piccola schiera di soci, che per parecchi decenni ne avevano rappresentato la forza migliore, il sostegno più valido, dando ad essa il fecondo contributo della loro bontà e della loro dottrina.

Altri tre seggi accademici si sono resi vacanti nel breve volgere di pochi mesi: uno fra i soci stranieri e due fra gli ordinari.

Sul finire del 1935 morì a New York, ove aveva svolta tutta la sua lunga e fertilissima attività, che gli aveva procacciata larga e meritata rinomanza non solo in America ma in tutto il mondo scientifico, Henry Fairfield Osborn, che apparteneva dal dì 11 febbraio 1933 alla nostra Accademia. I suoi principali meriti scientifici nel campo delle discipline geologiche e paleontologiche vennero già messi in rilievo dal socio D'Erasmo, che nell'adunanza del 4 aprile ne lesse una commemorazione, inserita nel Rendiconto accademico. Qui basterà ricordare che l'Osborn, fondatore della fiorente scuola paleontologica americana ed organizzatore delle più importanti esplorazioni geologiche asiatiche di questi ultimi decenni, ha incancellabilmente legato il suo nome alle ricerche più moderne e più complete di mammologia ed erpetologia fossile. Autore di più di un migliaio di lavori in svariati campi delle scienze naturali, lascia orma profonda e duratura presso gli studiosi di ogni paese, tanto nel campo strettamente paleontologico, con le magistrali ricerche sopra gli Equidi, i Rinoceronti, i Titanoteri,

gli Amblipodi, i Proboscidati e i vari gruppi di Dinosauri, quanto nei più vasti dominii della biologia e della filosofia, con gli scritti riguardanti i problemi sull'origine e l'antichità dell'uomo, sull'evoluzione delle specie, sull'ereditarietà dei caratteri acquisiti, sulle mutazioni, sulle variazioni per adattamento ecc.

Il 20 giugno 1936 si spense in Napoli, ove aveva svolto più di mezzo secolo di attività didattica e scientifica e dove aveva tenuto le più alte cariche accademiche, amministrative e politiche, Pasquale DEL PEZZO, duca di Caianello, anziano fra i nostri soci, che apparteneva alla Sezione di Scienze matematiche dal 10 dicembre 1892 in qualità di corrispondente e dal 20 novembre 1897 in qualità di socio ordinario. Nato a Berlino il 2 maggio 1859 da notissima e benemerita famiglia napoletana, egli si laureò in giurisprudenza nel 1881, e nel 1883 in matematiche pure. Dopo aver proseguito gli studi per altri tre anni a Roma ed all'estero, conseguì l'abilitazione alla libera docenza in Geometria proiettiva nel 1885. Un anno dopo, in sèguito a voto unanime della Facoltà, ebbe l'onore di succedere a CAPORALI nella cattedra di geometria superiore, prima come incaricato, quindi, dal 1890, per concorso, come professore straordinario, e finalmente come ordinario. Di vasta erudizione, di multiforme coltura, di spirito vivace ed arguto, il DEL PEZZO, passava, con brillante versatilità, dalle più alte vette della matematica astratta ai più svariati campi della pratica, sapendo sempre scegliere ed affrontare gli argomenti di ricerca più importanti e più fecondi di risultati, e traendo profitto delle sue estese cognizioni nella letteratura classica e contemporanea, e nelle discipline giuridico-sociali, per sostenere con opuscoli, e con pubbliche conferenze, tesi spesso ardite e geniali, opinioni singolarmente indipendenti e sempre originali. I competenti nelle discipline geometriche sapranno mettere in degno rilievo i più importanti resultati dei suoi lavori, inseriti nei Rendiconti della nostra Accademia, in quelli del Circolo matematico di Palermo, negli Atti dell'Accademia Pontaniana, negli Annali di Matematica ecc., e riguardanti principalmente la geometria di posizione, la teoria degli iperspazi, quella dello spazio rigato, e dei connessi, e delle trasformazioni birazionali, ecc. L'Accademia delle Scienze di Napoli, che aveva accolto i suoi primi lavori giovanili *Sulla curva Hessiana* e *Sui sistemi di coniche,* rispettivamente nel 1883 e nel 1884, ha pubblicato altresì i frutti ultimi della sua ancora attiva e vegeta vecchiaia, sulla *Geometria ad h-dimensioni* (1933), nonchè *Sull'esagono completo nel Quattrospazio* e *Sulle involuzioni piane e sul numero di Caporali* (1934).

I suoi meriti, universalmente riconosciuti, gli valsero onori di larga risonanza. Rettore della R. Università, Sindaco di Napoli, Senatore del Regno dal 6 ottobre 1919, fu altresì, per lunghi periodi, presidente dell'Accademia Pontaniana, del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, ed appartenne, in qualità di corrispondente, a numerose Società scientifiche italiane e stra-

niere. Particolarmeute affezionato al nostro Sodalizio, vi ricoprì ripetutamente le cariche di presidente e di segretario.

Un' altra figura, ugualmente rappresentativa della vita, della scienza e dell'insegnamento superiore di quest'ultimo cinquantennio in Napoli, è quella di Udalrigo Masoni: già professore di Idraulica teoretica e pratica e per un ventennio Direttore della R. Scuola d'Ingegneria di Napoli, amministratore del Comune, deputato al Parlamento Nazionale, spentosi in Napoli il 29 settembre 1936. Laureato in Matematica pura nel 1881 e in Ingegneria civile nel 1883, egli svolse tutta la sua carriera scientifica in Napoli, dedicandosi dapprima a ricerche di geometria pura e di meccanica teorica. I suoi lavori di idraulica teorica e pratica cominciano nel 1888, e, oltre la cattedra presso la Scuola Superiore Politecnica, gli valsero subito un posto eminente fra gli idraulici italiani. Ma il merito grandissimo del Masoni — come giustamente ebbe già a rilevare il consocio Marcolongo — è quello di aver tentato opera che aveva arrestato la stessa poderosa attività e la mente del Brioschi: di dotare cioè l'Italia di un trattato di idraulica, in cui, facendo tesoro delle ricerche personali, approfondendo quelle originali e talvolta oscure del Boussinesq, tutto fosse ridotto a semplicità e rigore scientifico. Tanto in quest'opera originale e poderosa, che ebbe il più grande e meritato successo, quanto negli altri lavori di idraulica, per la maggior parte inseriti negli Atti dell'Istituto d'Incoraggiamento e dell'Accademia Pontaniana di Napoli, il Masoni seppe sempre accoppiare alle più alte speculazioni scientifiche i necessari richiami alla tecnica e alla pratica, dimostrando nella sua lunga carriera di studioso e di insegnante di sapere fondere in una sintesi felice le minuziosità del delicato teorico con la profonda sagacia del tecnico sperimentato. Socio corrispondente della nostra Sezione di matematica fin dal 9 luglio 1898, fu nominato socio ordinario il 24 giugno 1922 e ricoprì la carica di presidente nell'anno 1927.

Di questi due ultimi consoci, che per lunghi anni assiduamente parteciparono alle nostre adunanze e che erano legati a questa Accademia da antichi vincoli di affetto e di devozione, altri rievocherà degnamente la nobile figura di studiosi, di maestri, e di cittadini, mettendo in chiaro rilievo la multiforme opera spesa in vantaggio della scienza, della scuola e della patria. Colui che vi parla non ha saputo tuttavia resistere al bisogno di ricordare, sia pur brevemente e disadornamente, le precipue doti dei Colleghi scomparsi, e non sa oggi chiudere altrimenti il suo dire, che mandando alla loro cara e venerata memoria il reverente e commosso omaggio di questo Sodalizio.

Sull' iterazione delle funzioni monotone

Nota del socio corrispondente **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 9 gennaio 1937 - XV)

Sunto. — L' A., come premessa necessaria ad una teoria dei fenomeni ciclici, considerati da un nuovo punto di vista, tratta l'argomento indicato dal titolo.

1. Il problema dell'iterazione di una funzione assume aspetti vari a seconda del campo nel quale esso viene considerato: relativo ad una funzione di variabile reale o di variabile complessa; ricerca in grande o in piccolo dei valori «susseguenti» ad uno assegnato; studio del comportamento delle iterate successive della funzione; etc.

I diversi aspetti sono certamente interdipendenti; ma il fissarne uno permette di adottare metodi più convenienti ad esso che ad un altro.

Limitandosi al campo delle variabili reali, è possibile fare uno studio completo e simultaneo di varii aspetti della quistione, specie se si restringe l'analisi al campo delle funzioni monotone e continue. Ed è questo che noi faremo.

È fin troppo chiaro che due tipi fondamentali si presentano subito: quello delle funzioni crescenti e quello delle decrescenti.

Quasi tutti i risultati si riportano alle funzioni rispettivamente non decrescenti e non crescenti; ma una maggiore perspicuità deriva dal fatto che quelle crescenti e quelle decrescenti sono anche, di necessità, invertibili, se continue.

In tal caso, dunque, vi è di ogni numero x il susseguente, cioè il valore assunto dalla funzione per tale x; e l'antecedente, unico, cioè quel valore di cui il susseguente sia proprio x. Gli iterati — di indice positivo o negativo — formano un insieme numerato di cui l'indice dà l'ordine di iterazione.

Tutto quanto diremo vale tanto se si tratta di funzione definita in tutto il campo dei numeri reali, quanto se definita solo in un intervallo (oppure anche su un insieme), purchè questo venga trasformato in sè od in una sua parte dalla funzione considerata: cioè i valori da questa assunti nell'intervallo (o nell'insieme) siano valori dello stesso.

2. Sia assegnata la funzione $f(x)$ supposta continua e monotona. Cominciamo dapprima col prendere in esame il caso che sia non decrescente, ed esaminiamo come essa si comporta rispetto al processo di iterazione. Saranno così valutati i due problemi, strettamente connessi fra loro:

I. Studiare la successione di funzioni

$$\Phi \equiv f_1 = f(x) \quad ; \quad f_2 = f\big(f(x)\big); \ldots ; f_n = f\big(f_{n-1}(x)\big); \ldots$$

II. Studiare la successione di valori

$$I(x) \equiv x_0 = x\,;\, x_1 = f(x_0)\,;\, x_2 = f(x_1) = f_2(x_0)\,;\, \ldots\,;\, x_n = f(x_{n-1}) = f_n(x)\,;\, \ldots$$

nella sua composizione e nella sua dipendenza da x.

3. Cominciamo dal notare che quest'ultimo insieme, per la stessa natura della funzione f, è formato tutto da numeri o non decrescenti, o non crescenti; e quindi le alternative possibili, riguardo all'insieme I, sono:

o che esso ammette un solo punto-limite, (unico, al finito o all'infinito) sempre che sia formato da un'infinità di valori *tutti* distinti,

o che esso sia formato da un numero finito di punti distinti e da infiniti altri, successivi ai primi, tutti coincidenti fra loro.

In effetti, data la monotonia di $f(x)$, dovranno valere le

$$x_0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leq \ldots$$

oppure le

$$x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots ;$$

perchè se fosse

$$x_0 \leqq x_1$$

data la non decrescenza di f, sarebbe anche

$$f(x_0) = x_1 \leq f(x_2) = x_2$$

ed iterando, in generale,

$$x_n \leq x_{n+1} ;$$

mentre se invece fosse:

$$x_0 \geq x_1$$

si otterrebbe, analogamente, la validità della seconda catena di diseguaglianze.

Se poi per un certo indice valesse la

$$x_r = x_{r+1}$$

si dedurrebbe che, altresì

$$x_{r+1} = x_{r+2} \quad ; \quad x_{r+2} = x_{r+3} ; \ldots$$

Pertanto, se nel punto x considerato si ha

$$f(x) > x ,$$

sarà valida una delle alternative:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots$$

oppure

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_r = x_{r+1} = x_{r+2} = \dots;$$

Mentre, se nel punto considerato si ha

$$f(x) < x$$

sarà valida una delle due alternative

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots$$

oppure

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_r = x_{r+1} = x_{r+2} = \dots$$

Le seconde alternative sono escluse se la $f(x)$ è invertibile; se cioè ogni equazione

$$f(x) = \eta$$

con η assegnato arbitrariamente, ammette *una* sola soluzione; se cioè la $f(x)$ è sempre *crescente* in senso stretto.

4. In ogni caso e nelle prime e nelle seconde alternative, la successione ammetterà *sempre un unico punto limite* x^*, coincidente con x_r nelle seconde. In tal caso è ovviamente $f(x^*) = x^*$.

Se vale la prima alternativa, questa stessa eguaglianza

$$f(x^*) = x^*$$

è ancora valida.

Ed, in effetti, per la stessa costruzione dell'insieme I, x^* sarà punto limite, unico, della successione parziale $x_1, x_2, \dots$; cioè di $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n) \dots$ E, data la continuità di $f(x)$, poichè $x_n \to x^*$, sarà anche $x_{n+1} = f(x_n) \to f(x^*)$.

Quindi

$$f(x^*) = x^*.$$

5. I punti nei quali è soddisfatta l'equazione

$$f(x) = x$$

formano un insieme II, il quale è lasciato invariato, punto per punto, dalla funzione f. Questo insieme è *chiuso*: sia $\overline{x}$ un punto limite di tale insieme,

dovranno esistere dei punti x^*, tali che

$$|\overline{x} - x^*| < \varepsilon.$$

E per la continuità di f, dovrà aversi di conseguenza:

$$|\varphi(\overline{x}) - \varphi(x^*)| < \sigma$$

con $\varepsilon = |\overline{x} - x^*|$ e σ tendenti simultaneamente a zero; e siccome

$$\varphi(x^*) = x^*$$

sarà anche

$$|\varphi(\overline{x}) - x^*| < \sigma.$$

Questa, tenuta presente la diseguaglianza di partenza, conduce proprio a

$$\varphi(\overline{x}) = \overline{x}.$$

Dunque, come avevamo detto, i punti limiti di H appartengono ancora ad H.

Pertanto H si spezza nella somma di due insiemi disgiunti H' ed H'', di cui il primo numerabile ed il secondo perfetto.

Ciò implica che i punti x, per i quali

$$f(x) \neq x$$

formano un insieme K, costituito da una infinità numerabile di segmenti aperti, i cui estremi appartengono ad H.

Questo insieme K a sua volta si divide in due altri: in uno di essi, K^- è sempre

$$f(x) < (x)$$

nell'altro, K^+, invece è sempre:

$$f(x) > x.$$

6. Supponiamo di trovarci in un punto x, di un intervallo aperto appartenente a K^+, ad esempio. Esso è limitato da due punti x^*, cioè $\underline{x}^* < \overline{x}^*$ per i quali dunque

$$f(\underline{x}^*) = \underline{x}^* \quad ; \quad f(\overline{x}^*) = \overline{x}^* .$$

Sieno ora $x = x_0$ e $\xi = \xi_0$ due punti di detto intervallo E^*, con $x < \xi$. Per la crescenza e la monotonia di f, e trovandoci in K^+, sarà anche

$$x_1 \leq \xi_1 \quad ; \quad x_0 \leq x_1 \quad ; \quad \xi_0 \leq \xi_1 .$$

In altre parole, in un intervallo di K^+, le due successioni I risultano crescenti, e siccome

$$x_0 , \xi_0 < x^*$$

dovrà essere anche

$$x_1 = f(x_0) , \xi = f(\xi_0) , < f(x^*) = x^*$$

altrimenti la funzione f non sarebbe crescente nell'intervallo considerato.

D'altro canto nell'intervallo non cadono altri punti x^*; quindi gli insiemi $I(x)$, $I(\xi)$ ammettono come punto limite precisamente x^*.

Infine $\xi_0 = \xi$ dovrà di necessità cadere in uno degli intervalli x_r, x_{r+1}; e quindi esisterà un indice r tale che

$$x_r \leq \xi_0 \leq x_{r+1}$$

e di conseguenza, sarà anche

$$x_{r+1} \leq \xi_1 \leq x_{r+2} .$$

Se, in particolare, nell'intervallo E^* la f è invertibile, esso intervallo E^*, risulta decomposto con la scelta arbitraria di x_0 in una infinità numerabile di intervalli parziali (x_r , x_{r+1}) con $r = 0, \pm 1, \pm 2$ ciascuno dei quali è trasformato nel successivo dalla funzione f, punto per punto, biunivocamente, ed in modo tale che al variare di ξ da x_0 ad x_1, ξ_1 varia da x_1 ad x_2 e così via.

Al punto $\overline{x}$ si giunge così come unico punto limite, e dalla sinistra: esso, con una locuzione abituale è *attrattivo* dalla sinistra.

7. Se invece la funzione f non è invertibile in quell'intervallo, questo fatto si potrà verificare o perchè l'equazione

$$f(x) = \gamma \qquad \underline{x}^* < \gamma < \overline{x}^* \quad ; \quad \underline{x} \leq x \leq \overline{x}$$

ammette più soluzioni per certi valori di γ, o perchè una delle due equazioni

$$f(x) = \underline{x}^*$$
$$f(x) = \overline{x}^*$$

ammette più soluzioni x nell'intervallo aperto E^* considerato, oppure infine per l'una e l'altra cosa assieme.

Data la continuità e la monotonia di f, si vede che fissato γ per cui si verifichi una di queste ipotesi, se x' ed x'' soddisfano ambedue a

$$f(x') = \gamma \quad ; \quad f(x'') = \gamma$$

devono di necessità soddisfare ad essa tutti i punti compresi fra x' ed x'': ciò significa — in altre parole — che se la f non è monotona in senso stretto, vi saranno dei tratti (intervalli) di E^* nei quali essa assume valore costante.

Se uno di tali intervalli cade con l'estremo destro in $\bar{x}$, allora $f(x) = \bar{x}^*$, risulta soddisfatta per tutti i valori inclusi nell'intervallo $(\bar{x}, \bar{x}^*)$, ed i ragionamenti fatti sugli I_r continuano a valere; salvo che quando per un indice sufficientemente elevato, x_r, cade in $(\bar{x}, \bar{x}^*)$, si avrà subito:

$$x_r = x_{r+1} = \dots$$

Se invece uno di tali intervalli cade con l'estremo sinistro in $\underline{x}^*$, allora $f(x) = \underline{x}^*$ risulta soddisfatta per tutti i valori inclusi nell'intervallo $(\underline{x}, \underline{x}')$, e per un punto qualunque di questo intervallo sarà l'estremo inferiore un punto di indifferenza (o se si vuole anche, per estensione, attrattivo).

Se invece si considera uno di tali intervalli $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, tutto interno a $(\underline{x}^*, \bar{x}^*)$, ciò implica, come si è detto, che

$$f(x) = \gamma$$

ammetta per soluzione tutti i punti interni ad $(\underline{x}', \bar{x}')$; e quindi se un qualunque iterato di x_0 cade in esso, e sia x_r, sarà sempre $x_{r+1} = \gamma$. Ma, in definitiva quest'ultimo caso non porta alcuna sostanziale variante alle conclusioni generali.

Se invece di trovarci in un intervallo E^+ di K^+, ci fossimo trovati in un intervallo E^- di K^-, il ragionamento si sarebbe svolto in termini del tutto analoghi; salvo che l'estremo inferiore $\underline{x}^*$ diventa attrattivo, perchè ad esso tendono tutte le successioni di iterati di punti di E^- facciamo eccezione solo — eventualmente — per i punti di $(\bar{x}, \bar{x}^*)$ nei quali la f resta costante ed eguale ad $f(\bar{x}^*) = \bar{x}^*$, perchè per essi diventa attrattivo $\bar{x}^*$.

8. Volendo riassumere tutto quanto precede, possiamo dire che:

I. L'insieme $I(x)$ è formato da una successione monotona.

II. Esso ammette come punto limite l'estremo destro (e rispettivamente sinistro) dell'intervallo compreso fra due valori x^* pei quali

$$f(x^*) = x^*$$

e nel quale non vi siano altre soluzioni di questa equazione, purchè in esso sia $f(x) \geq x$ (e rispettivamente $f(x) \leq x$); e purchè x non cada nell'intervallo parziale a partire dall'estremo sinistro (rispettivamente destro), nel quale la f è costante.

In tal caso ammette come punto-limite — assumendo valore costante tutti i termini della successione — precisamente l'estremo sinistro (rispettivamente destro).

III. Un punto x^* è attrattivo da ambedue le parti, se in esso a sinistra è

$$f(x) > x$$

ed a destra

$$f(x) < x.$$

È repulsivo se le dette diseguaglianze si invertono.

Esso punto x^* è attrattivo o repulsivo per tutti i punti del segmento (a destra ed a sinistra) che arriva sino al punto nel quale la f assume il valore del più prossimo altro punto x^*.

IV. Un punto x^* può essere attrattivo da un lato e repulsivo dall'altro a seconda della validità delle diseguaglianze

$$f(x) > x \quad , \quad f(x) < x.$$

V. Tutto quanto si è detto, resta invariato ove si considerino le iterate della f; e se la f stessa è invertibile, vale anche per la funzione inversa e le sue iterate: Salvo che per queste i punti attrattivi diventano repulsivi e reciprocamente.

9. Se invece di considerare l'insieme I si considera la successione F delle iterate, si trova che:

I. La successione φ delle iterate ammette sempre una funzione limite φ.

II. La funzione limite φ coincide, naturalmente, con la f in tutto l'insieme chiuso H, sul quale $f(x) = x$.

III. In ogni intervallo E la funzione assume:

1.° in un E^+, per cui $f(x) > x$ il valore costante $\overline{x}^*$ dato dall'estremo superiore dell'intervallo, escluso l'intervallo parziale $(\underline{x}^*, \underline{x}')$ (nel quale la f è costante ed eguale ad $\underline{x}^*$) assumendo ivi il valore $\underline{x}^*$ dell'estremo inferiore dell'intervallo.

2.° in un E^-, per cui $f(x) < x$ il valore costante $\underline{x}^*$ dato dall'estremo inferiore dell'intervallo, escluso l'intervallo parziale $(\overline{x}', \overline{x}^*)$ (nel quale la f è costante ed eguale ad $\overline{x}^*$) assumendo ivi il valore $\overline{x}^*$ dell'estremo superiore dell'intervallo.

IV. La φ soddisfa all'equazione funzionale

$$\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x).$$

Essa funzione φ è dunque costante a tratti, ed è in generale discontinua; i suoi punti di discontinuità cadono al più, o nei punti dell'insieme H, oppure negli estremi dei tratti in cui la $f(x)$ assume valore costante. È ovvio ed è quasi intuitivo che non si può affermare la uniforme convergenza delle f_n alla funzione limite φ.

V. Tutto quanto si è detto continua a valere se, invece di parlare di

funzione monotona non decrescente (o, più strettamente, crescente), si parla di funzione monotona in un intervallo (a, b), purchè i valori assunti da essa funzione formino un insieme racchiuso in (a, b). In altri termini, tutto quanto si è detto continua a valere nell'intervallo (a, b), purchè sia $a \leq m \leq M \leq b$, ove m ed M sieno gli estremi inferiore e superiore di f in (a, b).

VI. Lo stesso insieme H compete a tutte le iterate di f, e se questa è invertibile anche alla sua inversa ed alle sue iterate.

10. Trattiamo ora il caso nel quale la funzione considerata, sempre supposta continua e monotona, sia non crescente. Il comportamento di tale caso, rispetto all'iterazione è del tutto diverso. Sia $g(x)$ la funzione da prendere in esame. Anzitutto è immediato che mentre tutte le iterate di indice pari, saranno non crescenti, quelle di indice dispari saranno non decrescenti. Ed in effetti dalla simultanea validità di

$$x' < x'' \quad ; \quad g(x') \geq g(x'')$$

si trae che, applicando la g, valgono simultaneamente le

$$g(x') \geq g(x'') \quad ; \quad g\big(g(x')\big) \leq g\big(g(x'')\big).$$

Cioè, chiamando $g\big(g(x)\big)$ con f, f sarà una funzione monotona non decrescente.

L'insieme I da considerare ora, è quello dato da:

$$x_0 \quad , \quad g(x_0) = x_1 \quad , \quad g(x_1) = f(x_0) = x_2, \ldots ;$$

sicchè esso si spezza nei due insiemi

$$J \equiv x_0 = \xi_0 \quad ; \quad x_1 = \xi_1 = f(\xi_0) \quad ; \quad x_4 = \xi_2 = f(\xi_1); \ldots$$
$$Y \equiv x_1 = \eta_1 = g(x) \quad ; \quad x_0 = \eta_2 = f(\eta_1) \quad ; \quad x_5 = \eta_3 = f(\eta_1); \ldots$$

Tutti i valori dell'insieme Y si ottengono per mezzo della funzione g da quelli dell'insieme J; e questi dai primi nello stesso modo.

Si osservi che, in questo caso, per la definizione della $g(x)$, l'equazione

$$g(x) = x$$

non ha che una sola radice, e ne ha sempre una sola se g è continua. Detto x^* tale valore, ne segue che valgono le

$$x < x^* \quad , \quad g(x) \geq g(x^*) = x^*$$
$$x > x^* \quad ; \quad g(x) \leq g(x^*) = x^*;$$

e questo a sua volta implica che valgono le condizioni: per $x < x^*$ e quindi x è a sinistra di x^*, l'insieme J si trova *tutto a sinistra* di x^* e l'insieme

Y si trova *tutto a destra* di esso x^*; mentre per $x > x^*$ e quindi x è a *destra* di x^*; l'insieme J si trova *tutto a destra* ed Y *tutto a sinistra* di x^* stesso.

In generale, dunque, si avranno due punti limiti per l'insieme I; uno di essi è il limite di J, l'altro il limite di Y; essi coincideranno solo nella porzione di insieme perfetto, che include il punto x^* ora trovato, relativo alla equazione

$$f(x) = x.$$

Anche qui valgono le stesse considerazioni se la funzione g è decrescente soltanto in un intervallo (a, b) trasformato in sè stesso o in una sua parte dalla funzione $g(x)$.

In corrispondenza a quanto abbiamo detto per l'insieme I che si spezza in J ed Y, ciascuno avente un limite unico, se consideriamo le funzioni-limiti delle iterate, avremo due di tali funzioni limiti; e precisamente una, $\varphi(x)$, limite delle iterate di ordine pari, e quindi dedotta dall'iterazione di

$$f(x) = g\big(g(x)\big)$$

e godente di tutte le già indicate proprietà; l'altra funzione limite $\gamma(x)$ dedotta dalle iterate di ordine dispari, e definita quindi come

$$\gamma(x) = \varphi\big(g(x)\big) = g\big(\varphi(x)\big)$$

anch'essa costante a tratti dove lo è $\varphi(x)$, ma decrescente.

Sulla presenza della nahcolite al Vesuvio

Nota del socio corrispondente **E. Quercigh**

(Adunanza del dì 6 febbraio 1937-XV)

Sunto. — Viene accertata l'esistenza della nahcolite ($NaHCO_3$) fra i prodotti vesuviani, mentre finora il bicarbonato sodico era stato rinvenuto, con sicurezza, soltanto in combinazione equimolecolare biidrata col carbonato sodico, come costituente del trona ($Na_2CO_3 \cdot NaHCO_3 \cdot 2H_2O$).

I carbonati di sodio finora sicuramente constatati al Vesuvio sono com'è noto, solamente i tre riportati e descritti dallo Zambonini nella sua *Mineralogia Vesuviana* [1]) e cioè: la natrite (natron), $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$, menzionata fin dal 1845 da Arcangelo Scacchi come efflorescenza sulle scorie nascoste sotto alcune lave del Monte Somma [2]), la termonatrite, $Na_2CO_3 \cdot H_2O$, individuata per la prima volta da Eugenio Scacchi nel 1888 in alcune incrostazioni saline formatesi nelle parti interne della lava del 1859 al Fosso Grande [3]) ed il trona (urao), $Na_2CO_3 \cdot NaHCO_3 \cdot 2H_2O$, accertato da Ferruccio Zambonini nelle cavità di una tefrite leucitica bollosa trovata nel 1906 nell'Atrio del Cavallo [4]).

Non mancarono, fra gli studiosi dei minerali vesuviani, degli accenni alla presenza del bicarbonato sodico o anche la convinzione del suo rinvenimento, ma nessuna prova è stata da essi fornita della sua reale esistenza allo stato libero, anzichè in quello di combinazione, nei prodotti esaminati. Difatti, fin dal 1823 Monticelli e Covelli [5]) hanno fatto cenno del « sottocarbonato di soda » come di un costituente, assieme al carbonato sodico ed ai solfati di sodio e potassio, del rivestimento osservato il 28 febbraio 1822 su rottami di lava « ancora calda sgorgata nei parossismi di quei giorni » ma essi non hanno dato, nè allora, nè ulteriormente, alcuna prova od indizio della formazione accennata, della quale non trattarono in seguito nel

---

[1]) F. Zambonini, *Mineralogia Vesuviana*. Atti R. Acc. Scienze fis. e mat. di Napoli Vol. XIV, Serie 2.ª, N. 7 (1910), pag. 93, 94, e Suppl. al Vol. XX, Serie 2.ª (1935-XIII), pag. 122, 123.

[2]) A. Scacchi, *Napoli e i luoghi celebri delle sue vicinanze*, (1845), II, pag. 409.

[3]) E. Scacchi, Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli (1888), pag. 486.

[4]) F. Zambonini, Atti R. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli (2.ª), XIII, N. 8, pag. 38.

[5]) T. Monticelli e N. Covelli, *Storia dei fenomeni del Vesuvio avvenuti negli anni 1821 ecc.* (1823) pag. 25; Opere dell'Abate Monticelli, Napoli 1842, Vol. II, pag. 192.

loro *Prodromo alla Mineralogia Vesuviana* del 1825 e neppure nella successiva *Appendice* pubblicata nel 1839.

Analogamente, in epoca meno lontana da noi, il Matteucci [1]) rendendo conto di alcune sue osservazioni sui prodotti da lui rinvenuti come rivestimento di una fenditura prodottasi nella lava del 1895, affermò di aver constatato, nella sostanza bianca, cristallino-polverulenta, da lui raccolta, la presenza del sodio (con tracce di potassio e ammonio) combinato agli acidi cloridrico, solforico e carbonico con predominio di quest' ultimo, mettendo in evidenza che la soluzione acquosa della miscela salina dava le reazioni tanto dei carbonati che dei bicarbonati.

È perciò merito del Matteucci di aver accertato per primo la presenza del bicarbonato sodico al Vesuvio, ma egli non ha stabilito quantitativamente le rispettive proporzioni del bicarbonato rispetto al carbonato, e non ha tentato una separazione dei componenti allo stato solido; perciò ogni conclusione sulla costituzione di quelle formazioni saline rimaneva incerta, ed ingiustificata era l'ipotesi dell'esistenza in esse del bicarbonato sodico come fase a sè, perchè tale ipotesi non poteva avere maggiore attendibilità di quella che considerasse, invece, questo composto completamente legato al carbonato, per formare con due molecole d'acqua il trona, minerale ben noto quantunque non osservato fino allora (1897) fra i prodotti vesuviani.

Si è verificato, infatti, che in seguito lo Zambonini dopo aver riosservato al Vesuvio il bicarbonato sodico, non come minerale a sè, bensì in combinazione, come costituente del trona, volle riesaminare i campioni originali della sostanza raccolta dal Matteucci e riferì, pur senza dare ulteriori dettagli, di essersi potuto accertare che questa era identica al trona [2]), togliendo così ogni valore ed appoggio all'ammissione in essa della fase: bicarbonato di sodio.

Esaminando alcune incrostazioni, ben conservate in vasetto a tappo paraffinato, che furono raccolte nel luglio 1934 nella Valle dell'Inferno dalla guida vesuviana Alfonso Sannino, in una grotta formatasi nella lava discesa verso la fine del 1933, a circa m. 200 dall'orlo del cratere, io ho potuto constatarvi la presenza del bicarbonato sodico libero, che costituisce, com'è noto, la nahcolite, la cui esistenza come fase naturale è stata constatata da P. Walther [3]) nel 1922 e confermata da F. A. Bannister [4]) nel 1928.

Si tratta di crosticine microcristalline, per lo più bianche, o leggermente giallognole che all'aria non si alterano e non assorbono umidità, si

---

[1]) V. R. Matteucci, *Sul bicarbonato sodico prodottosi sulle lave dell'eruzione vesuviana principiata il 3 luglio 1895*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli (1897), pag. 223.

[2]) F. Zambonini, *Mineralogia Vesuviana* (1910) pag. 357, (1935), pag. 124.

[3]) P. Walther, American Mineralogist 7 (1922), pag. 86. Nature, 122 (928), pag. 866.

[4]) F. A. Bannister, Mineralogical Mag. 22 (1929), pag. 53.

iolgono completamente in acqua a freddo, oppure danno un leggerissimo siduo bianco-sporco o brunastro da attribuirsi evidentemente a casuale escolanza meccanica. La sostanza polverizzata con le dovute cautele e nuta in essiccatore, su cloruro di calcio a temperatura ambiente (18°), non rde se non leggermente di peso; riscaldata in tubicino chiuso ad una estreità sviluppa poca acqua e notevole quantità di anidride carbonica già a mperature inferiori a 200°. La soluzione acquosa dà, come il materiale lido, viva effervescenza cogli acidi diluiti e manifesta le reazioni qualitive dei carbonati e dei bicarbonati, oltre a quelle dei solfati, dei cloruri, l sodio e, benchè molto deboli, anche del potassio. In base ad esse risulta ıe le porzioni bianche totalmente solubili in acqua a temperatura ordinaria ntengono, accanto a piccole quantità di sali di potassio, esclusivamente lfato, cloruro, bicarbonato e carbonato di sodio; le porzioni giallastre sono quinate da sali ferrici; nelle tenui quantità di residuo insolubile in acqua, tenute da qualcuna delle crosticine, si riscontrano il ferro ed il calcio.

Le determinazioni quantitative vennero eseguite sul materiale più anco, una porzione del quale, polverizzata accuratamente, venne prima nuta in essiccatore su cloruro di calcio a temperatura ambiente (18°) fino costanza di peso, quindi sciolta in acqua a freddo determinandone il reduo insolubile, coi seguenti risultati:

perdita di peso in essiccatore a 18°	0.18 %
residuo insolubile in acqua.	0.10 %

Dalla piccola entità di queste percentuali si può dedurre che nella soanza non dovrebbero esistere idrati facilmente disidratabili a temperatura dinaria (mirabilite, natrite ecc.) se non in quantità assai limitate, e che residuo insolubile si può considerare estraneo ai composti solubili che ngono studiati, senza togliere, con ciò, alcun valore alle conclusioni.

Nella soluzione acquosa furono determinati il sodio, il potassio e l'acido lforico per pesata, l'acido cloridrico secondo Volhard, e l'anidride carnica combinata e semicombinata secondo Warden.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

Na	33.08
K.	0.10
SO_4	26.24
Cl.	18.15
CO_3	1.39
HCO_3	20.76
	99.72

Da questi dati appare chiaramente che, nella formazione vesuviana studiata, i composti potassici sono presenti in proporzioni limitatissime e lo stesso dovrebbe dirsi di eventuali composti idrati, se pur se ne volesse ammettere la possibilità di esistenza attribuendo in tutto o in parte alla presenza dell'acqua anzichè alle inevitabili imperfezioni della pratica analitica la differenza di 0.28 % = (100 — 99.72).

Prescindendo dalle evidenti possibilità di formazione di sali doppi e trascurando il potassio di cui potrebbero esser presenti sali semplici e doppi ma sempre in quantità minime, si possono calcolare le percentuali ipotetiche di sali di sodio corrispondenti agli anioni trovati, esse risultano le seguenti:

	%
Na_2SO_4	38.90
NaCl	29.83
$NaHCO_3$	28.58
Na_2CO_3	2.45
	99.76

Le proprietà chimiche e fisiche di questi composti ci permettono però di pensare che la massima parte del solfato, cloruro e bicarbonato sodico dovrebbero trovarsi come fasi a sè stanti nella miscela, costituendo, cioè, i noti minerali: thenardite, halite e nahcolite, mentre il carbonato potrebbe anche trovarsi legato in tutto o in parte a formare dei sali doppi con i precedenti o con le tracce di sali potassici, oppure a formare piccole quantità dei noti idrati con le eventuali tracce d'acqua.

L'esame microscopico mostra che queste incrostazioni sono costituite da aggregati a contorno irregolare in cui si possono individuare almeno tre fasi, inegualmente distribuite nella massa, ma sempre intimamente associate e commiste in modo da impedirne uno studio adeguato coi mezzi ordinari, pur permettendone l'identificazione in base a qualche carattere e principalmente agli indici di rifrazione valutati col metodo dell'immersione.

Nella polvere si notano frequenti individui aciculari, a contorno mal definibile perchè minutissimi, a forte birifrangenza negativa, con estinzione poco inclinata sulla direzione di allungamento (non oltre i 20°) e l'indice massimo di rifrazione molto vicino a 1,59; questi caratteri uniti alla constatazione che una goccia di soluzione alcolica di acido cloridrico portata a contatto col preparato produce viva reazione con questi cristallini che si sciolgono con sviluppo di bollicine gassose, permettono di identificarli con sicurezza per nahcolite, essendo noto che Larsen determinò $n\gamma = 1.586 \pm 0{,}003$ e Bollan $n\gamma = 1{,}59$ sul $NaHCO_3$ artificiale [1]) che Bannister sui cristalli

[1]) C. Hintze, *Handb. d. Mineralogie.* Ergänzungsband (1936), pag. 382.

turali osservò, analogamente, per tale indice dei valori pochissimo inriori a 1,59, e che l'estinzione su (010) nel $NaHCO_3$ è di 20°.

La thenardite, quantunque si presenti finemente granulare, senza conni definiti, si caratterizza per la debole birifrangenza e per i bassi indici rifrazione ($n\alpha = 1{,}47$ $n\gamma = 1{,}485$); la halite si distingue per l'isotropicità tica e il noto potere rifrangente. Nelle porzioni isotrope non è stato posbile individuare alcun punto con indice di rifrazione minore che faccia spettare la presenza di silvite; fra le fasi birifrangenti non si trova inzio dei carbonati come calicinite, termonatrite, natrite, trona, nè di altri inerali come mirabilite, glaserite od aftitalite, dei quali tutti, come l'alisi indica, non potrebbero esistere qui se non piccolissime quantità la cui entificazione mediante l'esame microscopico può, ovviamente, venire ostalata o dall'estrema piccolezza degli individui o dalla loro eccessiva dibersione nella grande massa degli altri sali.

Di un sale doppio di probabile formazione fra il carbonato sodico trovato il corrispondente solfato, la hanksite ($4Na_2SO_4 \cdot Na_2CO_3$), del quale si calolerebbe la possibilità di esser presente con un massimo del 15,6 % non si esce otticamente ad avere alcun indizio, tale mancata constatazione non può attribuire se non alla sua assenza o quasi, se si considera che, per la ia facile sfaldabilità secondo la base e per la sua uniassicità dovrebbe difcilmente sfuggire alla ricerca. La presenza del composto $2Na_2SO_4 \cdot Na_2CO_3$, a cosidetta burkeite non rinvenuta finora in natura, che sarebbe meno falmente individuabile in presenza di molta thenardite perchè come questa birifrangente, biassica positiva con indici di rifrazione poco diversi dai uoi, sembra doversi scartare a priori perchè, secondo Caspari [1]), essa è eliquescente all'aria umida mentre ciò non si verifica affatto in queste ncrostazioni.

Da quanto ho esposto risulta chiara la forma mineralogica in cui si rovano la maggior parte del solfato, del cloruro e del bicarbonato sodico nettendo in evidenza il nuovo ritrovamento della nahcolite, ma non si può rarre alcuna indicazione circa la funzione del carbonato sodico il cui conenuto nella miscela risulta ammontare al 2,45 %. Volendo supporre che sso possa trovarsi in parte allo stato di idrato, da solo, come natrite o ermonatrite, o, assieme al bicarbonato nel trona, si calcola che occorrebbero rispettivamente presenti il 4.16, il 0.42 ed il 0.83 % di acqua; ma iccome dai risultati analitici questa si deve invece o escludere completaiente, o come caso limite ammetterla in proporzioni notevolmente minori, isulta che tutto al più una parte del carbonato sodico si può considerare resente sotto forma di uno o più dei detti minerali, mentre il resto dorebbe trovarsi necessariamente allo stato anidro libero oppure combinato il solfato.

---

[1]) Gmelin, *Hand. d. anorg. Chemie 21* (1928), pag. 772.

Nell' intento di chiarire le incertezze e di isolare, per quanto possibile la nahcolite, furono eseguiti dei tentativi di separazione delle varie fasi in funzione dei loro pesi specifici per mezzo di liquidi pesanti, impiegando a tale scopo opportune miscele di tetrabromuro di acetilene e di toluolo. Si potè così separare una porzione cospicua che affonda in liquido di densità = 2.60 e che potrebbe contenere oltre alla thenardite (2.67 — 2.69) anche l' eventuale glaserite od aftitalite (2.69 — 2.70) ed il solfato potassico (2.66). ma l' osservazione non permette di riconoscervi, al microscopio, se non la thenardite con le inevitabili tracce di halite e nahcolite meccanicamente trasportate per l' intima aderenza delle particelle. La porzione poco rilevante che si può separare nell' intervallo di densità compreso fra 2.40 e 2.60 la quale per ipotesi potrebbe contenere in gran parte la hanksite (2.56 — 2.57) ed il carbonato sodico anidro (2.50), risulta costituita da miscele meccaniche di thenardite halite e nahcolite senza tracce visibili di hanksite. Siccome il Na_2CO_3, com' è noto, mal si presta all' identificazione per via ottica, ho pensato di dosare in queste porzioni l' acido carbonico combinato e semicombinato, constatando che il primo si trova presente in quantità all'incirca tripla del secondo. Questi risultati avvalorerebbero l'ipotesi che il carbonato sodico sia presente qui allo stato libero piuttosto che a costituire la hanksite. Malgrado che, per la piccola differenza fra le loro densità sia difficile la separazione della halite dalla nahcolite, è stato possibile di isolare una discreta quantità di quest' ultima e di stabilire con successivi frazionamenti che il suo peso specifico deve considerarsi compreso nell'intervallo 2.20—2.21.

I valori che si possiedono in proposito per il bicarbonato sodico artificiale [1]) sono notevolmente discordanti come si può rilevare dalla seguente tabella in cui si riportano anche quelli ottenuti finora per la fase naturale dal Bannister (il quale, non ostante le notevoli quantità di trona e termonatrite presenti ed intimamente concresciute colla nahcolite nel suo materiale, potè, nei suoi tentativi di separazione colle miscele di ioduro di metilene e benzolo, stabilire con sicurezza che la nahcolite è più pesante del trona avvicinandosi al valore di 2,2) e da me che ho potuto spingere maggiormente l' approssimazione confermando pienamente i suoi risultati:

2.192	Playfair, Joule
2.163	Buignet
2.221	Stolba
2.206	Schroeder (1873)
2.208	Schroeder (1879)
2.159	W. C. Smith
2.2	F. A. Bannister (nahcolite)
2.20 — 2.21	E. Quercigh »

[1]) Gmelin, *Hand. d. anorg. Chemie 21* (1928), pag. 759.

Da questi dati si vede che i valori ottenuti da SCHROEDER sono da considerarsi come i più approssimati a quelli della fase naturale, e, per quanto sulta poi dalle mie osservazioni al microscopio sulle frazioni comprese a 2.20 e 2.21, sono da considerarsi, a mio parere, anche come i più esatti r il composto $NaHCO_3$.

Nelle frazioni più leggere contenenti la maggior parte della halite non o potuto osservare indizio di trona (2.11 — 2.15), di termonatrite (1.56), di atrite (1.44 — 1.47), di mirabilite (1.46 — 1.47). Questi risultati negativi essi in relazione colla concentrazione del Na_2CO_3 e l'assenza di hanksite elle porzioni dell'intervallo compreso fra 2.40 e 2.60, permettono di ritenere iù verosimile l'ipotesi della presenza di una buona parte almeno del Na_2CO_3 llo stato anidro libero, la cui formazione, anche a spese del bicarbonato, arebbe spiegabilissima per la nota tendenza di quest'ultimo sale a decomorsi sensibilmente già a temperature di poco superiori a quella ordinaria, emperature che facilmente si verificano nelle grotte laviche del tipo di uella in cui si è formata la nahcolite studiata.

L'origine di questa nahcolite al Vesuvio, poichè non ci sono note le ariazioni di temperatura e di concentrazione dell'anidride carbonica nella rotta in cui si è formata, sarebbe lungamente discutibile come si può rilevare considerando le proprietà chimiche di questi composti, le possibilità di postamenti nell'equilibrio del sistema: $Na_2CO_3+NaHCO_3+CO_2+H_2O$ in unzione della temperatura e le perturbazioni che l'afflusso di altri gas o apori vi può apportare. Questo problema si potrà meglio affrontare dopo no studio più approfondito di quello che finora fu fatto, delle formazioni arbonate vesuviane, le quali sono meno rare di quanto dalla letteratura n proposito si potrebbe dedurre, però fin d'ora si può ritenere che, all'inuori dei campi di esistenza degli idrati relativi, la nahcolite si forma e si scompone secondo gli spostamenti provocati nella reazione reversibile: $Na_2CO_3+H_2O_{vap.}+CO_2 \rightleftarrows 2NaHCO_3$ dalle variazioni della temperatura e delle concentrazioni dei componenti volatili, subordinatamente alla graduale eliminazione delle due fasi carbonate solide, provocata dai vapori acidi che le trasformano in halite e thenardite.

Istituto di Mineralogia della R. Università di Napoli.

Osservazioni meridiane dei pianeti Saturno e Urano eseguite nei mesi di settembre, ottobre e dicembre 1936

Nota della Dott. **M. Viaro**, *presentata dal socio corr.* **L. Carnera**

(Adunanza del dì 6 febbraio 1937 - XV)

Sunto. — Si riportano 22 ascensioni rette del pianeta Saturno e 3 del pianeta Urano determinate allo strumento dei passaggi di Bamberg, nei mesi di settembre, ottobre e novembre 1936.

Per quanto riguarda le condizioni strumentali, e il metodo di osservazione usati per determinare le ascensioni rette, che qui riportiamo, nulla vi è da aggiungere a ciò che fu detto nelle note precedenti [1]) da me pubblicate su questo argomento.

Le stelle di confronto, scelte fra le fondamentali del Berliner Astronomisches Jahrbuch, furono ridotte mediante l'opportuna correzione al FK3.

Le posizioni medie, per il 1936, delle stelle di confronto usate per la determinazione dei passaggi di Saturno sono:

		α (1936)			δ (1936)	
16 Pegasi	21^h	50^m	$8^s.921$	$+25°$	37′	23″.78
π Pegasi	22	7	8.567	+32	51	48.67
η Aquarii		32	4.088	— 0	26	52.83
10 Lacertae		36	23.176	+38	42	59.90
ζ Pegasi		38	16.157	+10	29	48.02
λ Pegasi		43	26.767	+23	13	41.98
λ Aquarii		49	16 601	— 7	55	14.41
o Androm.		58	58.324	+41	58	53.41
α Pegasi	23	1	34.260	+14	51	37.75
τ Pegasi		17	27.979	+23	23	22.66
$\varkappa$ Piscium		23	39.081	+ 0	54	17.91
70 Pegasi		25	54.958	+12	24	25.80
ι Androm.		34	59.480	+42	54	48.61
ι Piscium		36	39.433	+ 5	16	44.88
φ Pegasi		49	13.734	+18	45	52.89
ω Piscium		56	1.400	+ 6	30	32.30

[1]) *Osservazioni del pianeta Saturno.* Contributi astronomici, Serie II, N. 8.
Osservazioni di Urano e Cerere. Ibidem, N. 13.
Osservazioni meridiane del pianeta Giove eseguite nel giugno e luglio 1936. Ibid., N. 15.

α Androm.	0^h	5^m	$4^s.492$	$+28^0$	44′	13″.68
π Androm.		33	27.411	+33	22	2 .23
δ Androm.		35	53.998	+30	30	39. 94
μ Androm.		53	11.601	+38	9	9. 42

Saturno si riferiscono la tabella I, che da le differenze ottenute sera per ra fra il Δt medio e il Δt di ciascuna stella di confronto (i Δt si intendono dotti al tempo della culminazione del pianeta tenendo conto dell'andamento dell'orologio), e la II, che dà rispettivamente in ciascuna serata :

2.ª colonna — il tempo del passaggio al meridiano del primo bordo del pianeta (valori osservati).

3.ª » — Il tempo che il semidiametro equatoriale di Saturno impiega nel passare al meridiano (Nautical Almanac).

4.ª » — Il tempo del passaggio al meridiano del centro del pianeta (valori calcolati dal Nautical Almanac),

5.ª » — Le differenze fra le osservazioni e il calcolo.

6.ª » — Qualche annotazione sulle condizioni meteorologiche e le immagini stellari.

Per Urano le stelle di confronto furono le seguenti:

		α (1936)		δ (1936)		
π Androm.	0^h	33^m	$27^s.411$	$+33^0$	22′	2″.23
δ Androm.		35	53.998	+30	30	39 .94
μ Androm.		53	11 601	+38	9	9 .42
β Androm.	1	6	8.507	+35	16	54 .24
η Piscium		28	3.277	+15	0	59 .02
α Trianguli		49	25.627	+29	16	4 .14
α Arietis	2	3	33 600	+23	9	38 .55
β Trianguli		5	43.662	+34	41	7 .70
ξ^2 Ceti		24	45.108	+ 8	10	26 .85
ν Arietis		35	10.622	+21	41	8 .51

ed a questo pianeta si riferiscono le tabelle III e IV, che hanno un significato analogo a quello che la I e la II tabella hanno rispettivamente per il pianeta Saturno. Si dovrà solo ricordare, che nelle osservazioni Urano viene bisecato dal filo mobile alla stessa maniera delle stelle di confronto, e quindi tutti i valori della tabella IV si riferiscono al centro del pianeta.

TABELLA I.

Differenze fra il Δt medio ottenuto sera per sera e il Δt di ciascuna stella.
(Osservazioni di Saturno)

Data	16 Pegasi	π Pegasi	η Aquarii	10 Lacert.	ζ Pegasi	λ Pegasi	λ Aquarii	o Androm.	α Pegasi	τ Pegasi
1936										
IX 15	+0.027	+0.041	−0.015	+0.002			−0.057			
18	+0.039	−0.013		−0.015	−0.010					−0.0
22			−0.002	+0.040			−0.031			−0.0
25							−0.026	−0.020	−0.009	+0.0
X 1				−0.033		+0.018	+0.001		+0.036	
5			+0.009	−0.007		0.003	+0.018		−0.027	
9					+0.008	+0.020	−0.038		−0.008	
14			+0.013	−0.048	+0.011		0.000			−0.0
15							+0.023		+0.049	−0.0
17							−0.022		−0.006	−0.0
18										+0.0
21									+0.040	−0.0
30									+0.006	−0.0
XI 5									+0.027	+0.0
13									−0.018	+0.0
18								−0.040	+0.050	+0.0
19									−0.015	−0.0
20								−0.010	+0.041	+0.0
21										+0.0
22								−0.024		−0.0
23										+0.0
24										+0.0

Segue TABELLA I.

a	λ Piscium	70 Pegasi	ι Androm.	ι Piscium	φ Pegasi	ω Piscium	α Androm.	π Androm.	δ Androm	μ Androm.
6										
15										
18		−0.013		+0.017						
22		−0.003		+0.018						
25		0.000		+0.028						
1				−0.022						
5	+0.036	+0.004		−0.031						
9	+0.007			+0.014						
14	+0.005	+0.009		+0.022						
15		−0.053								
17	+0.027	+0.039		+0.015		0.028				
18	+0.003	−0.005			−0.010	−0.002				
21	+0.029				−0.040	−0.026				
30					−0.039	−0.037	+0.054	+0.007	−0.006	+0.016
5	−0.090	+0.044			+0.005					
13			−0.018		+0.030	+0.041	−0.040	+0.040	−0.019	−0.017
18	−0.013	−0.024			−0.017					
19		+0.029						0.000	−0.017	
20			−0.025					0.005	−0.019	
21	+0.026	−0.026			−0.002					
22	+0.006	+0.012			+0.008					
23	+0.020	−0.019			0.018	−0.011				
24	+0.021	−0.010			−0.020					

TABELLA II.

Data	Passaggio in meridiano del primo bordo di Saturno (valori osservati)	Semidiametro equatoriale del pianeta	α calc.	O—C	Annotazioni sulle condizioni meteorologiche
1936					
IX 15	$23^h\ 22^m\ 31^s.828$	$0^s.65$	$23^h\ 22^m\ 32^s.44$	$+0^s.04$	
18	21 41.159	0.65	21 41.82	−0.01	
22	20 34.373	0.65	20 35 09	−0.07	
25	19 45.238	0.65	19 45.97	−0.08.	
X 1	18 10.419	0.65	18 11.08	−0.01	Cielo all'inizio sereno poi fitti veli e nubi.
5	17 10.337	0.64	17 11.00	0.00	
9	16 13.347	0.64	16 14.04	−0.05	
14	15 7.263	0.64	15 8.00	−0.10	Immagini non buone.
15	14 54.868	0.64	14 55.55	−0.04	Vento, poi molte nubi.
17	14 30.801	0.64	14 31.47	−0.03	
18	14 19.139	0.63	14 19.84	−0.07	Vento leggero.
21	13 46.074	0.63	13 46.75	−0.05	Vento piuttosto forte
30	12 23.864	0.63	12 24.58	−0.09	
XI 5	11 14.551	0.62	11 45.20	−0.03	
13	11 12.621	0.61	11 13.34	−0.11	
18	11 5.237	0.61	11 5.94	−0.09	
19	11 4.920	0.61	11 5.63	−0.10	
20	11 5.050	0.61	11 5.73	−0.07	
21	11 5.526	0.60	11 6.21	−0.08	
22	11 6.459	0.60	11 7.10	−0.04	
23	11 7.752	0.60	11 8.38	−0.03	
24	11 9.379	0.60	11 10.06	−0.08	

TABELLA III. — *Differenze fra il Δt medio ottenuto sera per sera e il Δt di ciascuna stella*

Data	π Androm.	δ Androm.	μ Androm.	β Androm.	η Piscium	α Trianguli	α Arietis	β Trianguli	ξ^2 Ceti	ν Arietis
1936										
XI 11	+0ˢ.006	−0ˢ.030	+0ˢ.041		+0ˢ.023		−0ˢ.014		−0ˢ.028	
25				−0ˢ.018	+0.039	+0ˢ.019	−0.026	+0ˢ.009	−0.024	
26				+0.025	+0.050	−0.020	−0.065	−0.023	−0.001	+0.037

TABELLA IV.

Data	Passaggio in meridiano del pianeta Urano	α calc.	O—C
1936			
XI 11	2^h 19^m 40ˢ.737	2^h 19^m 40ˢ.67	+0ˢ.07
25	17 36 881	17 36.84	+0.04
26	17 28.685	17 28.65	+0.03

Sull' inversione della trasformata di Laplace

Nota del prof. **Carlo Miranda,** [1]) *presentata dal socio* **M. Picone**

(Adunanza del dì 6 febbraio 1937 - XV)

Sunto. — Nella presente nota viene esposto ed illustrato con un esempio un nuovo metodo di inversione della trasformata di Laplace, applicabile in taluni casi particolari di speciale importanza per le applicazioni.

Com'è noto si chiama trasformata di Laplace di una funzione $u(t)$, definita nell'intervallo $(0, +\infty)$, l'integrale

$$(1) \qquad u^*(\tau) = \int_0^\infty e^{-\tau t} u(t)\, dt\,,$$

dove $\tau = \xi + i\eta$ è un numero complesso con parte reale positiva.

Se $u^*(\tau)$ è funzione olomorfa di τ nel semipiano $0 \leq \xi_0 \leq \xi$ e se $u(t)$ verifica opportune ipotesi qualitative, l'equazione (1) può essere invertita mediante la formula di Fourier

$$(2) \qquad u(t) = \frac{e^{\xi_0 t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta t} u^*(\xi_0 + i\eta)\, d\eta.$$

La trasformazione funzionale (1) è stata oggetto anche recentemente di numerose ricerche. L'interesse da essa suscitato negli analisti proviene dal atto che, se una funzione $u(x_1, x_2, \ldots, x_r, t)$, definita per $0 \leq t < +\infty$, soddisfa ad un'equazione alle derivate parziali, lineare, a coefficienti indipendenti dal tempo, la sua trasformata di Laplace $u^*(x_1, x_2, \ldots, x_r, \tau)$ soddisfa anch'essa ad un'equazione a derivate parziali, di immediata costruzione, in cui non compaiono le derivate di u^* rispetto a τ. Il calcolo della u^* si presenta quindi più semplice che non quello della u. Una volta calcolata la u^* si può poi risalire da questa alla u per mezzo della formula (2). Giova per altro osservare che l'inversione dell'equazione integrale (1) per mezzo della formula (2) ha una portata soltanto formale, giacché, in pratica, il calcolo dell'integrale a secondo numero della (2) offre spesso difficoltà quasi insormontabili. Numerose sono le ricerche intese a superare tali difficoltà, e citerò,

---

[1]) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

queste, quelle di G. A. Campbell e R. M. Foster [1]) e di I. B. Russel [2]), e tendono appunto a rendere più agevole l'applicazione della (2), e una moria di M. Picone [3]), nella quale è dato un nuovo metodo di inversione la (1), che è affatto indipendente dalla (2), e che ha fornito in alcune ätiche applicazioni dei risultati molto notevoli.

Per quanto i contributi, apportati dalle memorie dei detti autori allo ıdio della nostra questione, siano assai pregevoli, non si può affermare che si siano definitivi. Mi è sembrato perciò interessante esporre un nuovo todo per l'inversione della trasformata di Laplace che, pur non essendo plicabile in generale, può però riuscire assai utile in taluni casi. Illustrerò i tale metodo, applicandolo all'integrazione di un problema al contorno, lativo alla equazione del calore, già risolto dall'Istituto per le Applicaoni del Calcolo in un particolare caso numerico [4]).

1. Mettiamoci nell'ipotesi che $u^*(\tau)$ sia una funzione meromorfa della riabile complessa τ, e diciamo

$$\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots$$

suoi poli, disposti in ordine di modulo non decrescente.

Diciamo $G_k\left(\frac{1}{\tau-\tau_k}\right)$ la parte principale di $u^*(\tau)$ nell'intorno di τ_k:

$$G_k\left(\frac{1}{\tau-\tau_k}\right)=\sum_{p=1}^{n_k}\frac{a_{kp}}{(\tau-\tau_k)^p}\,.$$

upporremo che esista una successione di curve regolari semplici e chiuse

$$C_0, C_1, \ldots, C_m, \ldots$$

odenti delle seguenti proprietà:

A) La successione dei dominii

$$T_0, T_1, \ldots, T_m, \ldots$$

mitati dalle dette curve invade tutto il piano complesso.

---

[1]) G. A. Campbell e R. M. Foster, *Fourier integrals for pratical applications.* echnical publications of the American Telephone and Telegraph Company, 1931.

[2]) I. B. Russel, *A method of evalueting the Fourier integral.* Journal of Mathematics and Physics, vol. XII, 1933.

[3]) M. Picone, *Recenti contributi dell' Istituto per le Applicazioni del Calcolo all' analisi quantitativa dei problemi di propagazione.* Memorie della R. Accademia d'Italia, Vol. VI, n. 12.

[4]) Cfr. M. Picone, *Loc. cit.*

B) Esiste un numero positivo L tale che, detta l_m la lunghezza della curva C_m e δ_m la sua distanza dall'origine O delle coordinate, si abbia

$$\frac{l_m}{\delta_m} \leq L.$$

C) Esiste un numero positivo M tale che riesca

$$max\,|\tau u^*(\tau)|\,[suC_m] \leq M.$$

È ben noto che, in tali ipotesi, vale per la $u^*(\tau)$ lo sviluppo di CAUCHY

$$u^*(\tau) = \lim_{m\to\infty} \sum_{\tau_k < T_m} G_k\left(\frac{1}{\tau - \tau_k}\right). \tag{3}$$

Osserviamo ora che si ha

$$G_k\left(\frac{1}{\tau-\tau_k}\right) = \int_0^\infty e^{-\tau t}\left(e^{\tau_k t}\sum_{p=1}^{n_k}\frac{a_{kp}}{(p-1)!}\,t^{p-1}\right)dt. \tag{4}$$

Dalle (3) e (4) si ricava quindi formalmente

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\tau_k t}\sum_{p=1}^{n_k}\frac{a_{kp}}{(p-1)!}\,t^{p-1}. \tag{5}$$

Siamo così pervenuti ad una formula di inversione della trasformata di LAPLACE, la cui validità non sarà difficile verificare in un caso concreto.

2. Allo scopo di illustrare il metodo di inversione della trasformata di LAPLACE sin qui esposto, prendiamo a considerare il seguente problema al contorno:

Integrazione nella semistriscia, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t < +\infty$ *dell'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{6}$$

con le condizioni ai limiti

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0} = 1 \quad , \quad u(1,t) = 0, \tag{7}$$

e la condizione iniziale

$$u(x,0) = 0 \tag{8}$$

k designando una costante positiva.

Moltiplicando la (6) e le (7) per $e^{-\tau t}$ e integrando tra 0 e $+\infty$, si trova che la trasformata di LAPLACE della soluzione $u^*(x,\tau)$ deve soddisfare al-

quazione differenziale

$$\frac{d^2u^*}{dx^2} - \tau u^* = 0, \tag{9}$$

lle condizioni ai limiti

$$\left[\tau u^* - k\,\frac{du^*}{dx}\right]_{x=0} = \frac{1}{\tau} \quad , \quad u^*(1,\tau) = 0, \tag{10}$$

cui

$$u^*(x,\tau) = \frac{\operatorname{senh}\left[\sqrt{\tau}\,(1-x)\right]}{\tau\left[\tau \operatorname{senh}\sqrt{\tau} + k\sqrt{\tau}\cosh\sqrt{\tau}\right]}\,.$$

E facile constatare che $u^*(x,\tau)$ è una funzione meromorfa di τ ammettente come poli del primo ordine tutti e soli i punti

$$\tau_0 = 0 \quad , \quad \tau_n = -\mu^2_n\,,$$

signando μ_n le radici positive dell' equazione

$$k\cos\mu - \mu\operatorname{sen}\mu = 0.$$

Si dimostra anche che la u^* è sviluppabile in serie di frazioni razionali al modo di Cauchy e si ha precisamente:

$$u^*(x,\tau) = \frac{1-x}{k\tau} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau+\mu^2_n} \cdot \frac{\operatorname{sen}\mu_n \operatorname{sen}\left[\mu_n(1-x)\right]}{\mu^2_n\,(k+\operatorname{sen}^2\mu_n)}\,.$$

Applicando la (5) al caso in esame si trova:

$$u(x,t) = \frac{1-x}{k} - 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 t}\,\frac{\operatorname{sen}\mu_n \operatorname{sen}\left[\mu_n(1-x)\right]}{\mu^2_n\,(k+\operatorname{sen}^2\mu_n)}\,. \tag{11}$$

Naturalmente bisognerebbe ora verificare che la funzione $u(x,t)$ così determinata è effettivamente una soluzione della (6) soddisfacente le (7) (8). Tale verifica presenta delle notevoli difficoltà, dovute al fatto che il sistema delle funzioni

$$\operatorname{sen}\left[\mu_n(1-x)\right]$$

non è un sistema ortogonale. Mi riserbo pertanto di trattare tale questione in un successivo lavoro.

Voglio, però, ancora dire che, almeno nel caso numerico considerato all' Istituto per le Applicazioni del Calcolo ($k = 0{,}15$), la serie a secondo membro della (11) risulta molto rapidamente convergente, tanto che, limitandosi a prendere i suoi primi quattro termini ($n \leq 3$), si ritrovano i valori già noti della $u(x,t)$.

Criteri per la costruzione di polinomi definiti

Nota del prof. **Guido Barba**, *presentata dal socio corr.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 3 aprile 1937 - XV)

Sunto. — L'A. completa alcuni risultati trovati sullo stesso argomento, in precedenti Note lincee ed assegna nuovi criteri per la costruzione di polinomi definiti.

1. In tre precedenti Note Lincee [1]) abbiamo trattato il problema dei polinomi definiti, dando numerosi criterii per riconoscere se un polinomio è non indefinito e varie costruzioni di sistemi lineari portanti a polinomi non indefiniti.

Vogliamo, qui, completare la trattazione col dare alcune generalizzazioni e conseguenze dei procedimenti esposti.

2. I due problemi posti in fine della prima Nota:

a) Trovare una iperpiramide avente assegnato baricentro.

b) Data l'iperpiramide trovare il baricentro, si possono estendere a punti *interni* all'iperpiramide.

Basta, infatti, in tal caso, partire dalla relazione:

$$(1) \qquad \frac{\sum_1^n u_i P_i}{\sum_1^n u_i} = Q$$

(pel simbolismo vedere Note citate) nella quale per essere sicuri che Q sia *interno* supporremo le u costanti positive.

Con referenza alla trasformazione del tipo $f(\alpha x)$, avremo, per la (1):

$$(2) \qquad \begin{cases} q_n(u_1 + \ldots + u_n) = (u_1 \alpha_1^n \quad + \ldots + u_n \alpha_n^n)\, a_n \\ q_{n-1}(u_1 + \ldots + u_n) = (u_1 \alpha_1^{n-1} + \ldots + u_n \alpha_n^{n-1})\, a_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_0 = a_0 \end{cases}$$

---

[1]) *Polinomi definiti. Problemi fondamentali.* Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, vol. XXIV, serie 6.ª, 2.° sem. fasc. 11. — *Polinomi definiti. Classi di polinomi definiti ottenuti da alcuni prefissati.* Rend. R. Acc. Naz. Lincei, vol. XXIV, s. 6.ª, 2.° sem. fasc. 12. — *Polinomi definiti Interpretazioni, proprietà e complementi.* Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, vol. XXV, serie 6.ª, 1.° sem. fasc. 1.

un sistema, cioè, di n equazioni in $2n$ incognite: le α e le u, da sodisfare con valore *reali* delle α e positivi delle u.

Se in tal sistema poniamo $u_1 = \ldots = u_n = 1$, ricadiamo, ovviamente, sul sistema corrispondente al caso baricentrico.

Se in (2), per esempio, fissiamo le α, il sistema si riduce ad n equazioni sulle n incognite u e si ha, pertanto, modo di riconoscere se un polinomio Q è, oppur no, non indefinito.

Basta, a tal uopo, che il sistema:

$$(3) \qquad \begin{cases} u_1(q_n - a_n \alpha_1^n) + \ldots + u_n(q_n - a_n \alpha_n^n) = 0 \\ u_1(q_{n-1} - a_{n-1}\alpha_1^{n-1}) + \ldots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_1(q_1 - a_1 \alpha_1) + \ldots = 0 \end{cases}$$

ammetta soluzioni *positive*.

Ovviamente le α non possono essere del tutto arbitrarie: occorre che esse non annullino *tutti* i coefficienti delle u in (3) ed a tal uopo *basta* sia:

$$\alpha_i \neq \frac{q_i}{a_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Con tali avvertenze le α, perchè (3) ammetta soluzioni diverse dalla evidente, occorre e basta sia:

$$\begin{vmatrix} q_n - a_n \alpha_1^n \ldots q_n - a_n \alpha_n^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_1 - a_1 \alpha_1 \ldots q_1 - a_1 \alpha_n \end{vmatrix} = 0.$$

Dopo ciò, se i valori tratti per le u sono *tutti positivi*, potremo affermare *di sicuro* che il polinomio dato Q è non indefinito.

Quanto si è detto per la trasformazione del tipo $f(\alpha x)$, può ripetersi per l'altra del tipo $f(x + \alpha)$.

3. Al polinomio non indefinito:

$$(4) \qquad f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

applichiamo la $f(\alpha x)$, prima e la $f(\beta x)$ poi, sarà non indefinito il polinomio:

$$\varphi(x) = f(\alpha x) + f(\beta x)$$

e più generalmente:

$$\varphi(x) = x^n S_n + a_{n-1} S_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 S_0$$

con

$$S_r = \alpha^r + \beta^r + \ldots + \lambda^r.$$

Segue, quindi, che dato un polinomio non indefinito, se ne può ottenere tutta una classe, moltiplicando i coefficienti per le somme delle potenze simili di quanti si vogliono costanti reali e, precisamente, moltiplicando il coefficiente c_s per S_s, con s da 0 ad n.

Nel caso della trasformazione $f(\alpha + x)$, posto:

$$S_r = \left(\frac{n}{r}\right)(\alpha^r + \ldots + \lambda^r)$$

da un polinomio non indefinito se ne trarrà una classe, moltiplicando il c_s per S_{n-s}, con s da 0 ad n.

4. Notato che un trinomio di secondo grado non indefinito resta tale anche dopo lo scambio dei coefficienti estremi, nel polinomio $f(x)$ (4), da un lato operiamo la decomposizione in trinomi come è stato fatto nella seconda Nota citata e, dall'altro, in seno ad ogni trinomio, teniamo conto della osservazione precedente, salvo pel primo e per l'ultimo trinomio — otteniamo, appena staccate le corrispondenti potenze di x:

$$a_n x^2 + a_{n-1} x + \frac{a_{n-2}}{2}$$
$$\frac{a_{n-4}}{2} x^2 + a_{n-3} x + \frac{a_{n-2}}{2}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Soddisfatte le relazioni:

$$(5) \qquad \begin{cases} a^2_{2r-1} \leq 2a_{2r-2} \cdot a_{2r} & \left(r = 1, \frac{n}{2}\right) \\ a^2_{2s-1} - a_{2s-2} \cdot a_{2s} \leq 0 & \left(s = 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1\right) \end{cases}$$

anche detti trinomi sono non indefiniti e quindi anche una combinazione lineare a coefficienti *positivi* di essi e dei corrispondenti trinomi caratterizzati, in un primo momento, nella predetta seconda Nota.

Si avranno pei coefficienti q_i del polinomio risultante, le relazioni:

$$(6) \qquad \begin{cases} q_n = (u_1 + v_1)\, a_n \\ q_{n-1} = (u_1 + v_1)\, a_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ q_{n-4} = (u_2 + u_3)\, \frac{a_{n-4}}{2} + V_2\, \frac{a_{n-2}}{2} + V_3\, \frac{a_{n-6}}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si ha, così, una nuova fonte di polinomi non indefiniti e se ne deduce, tresì, un nuovo criterio di sufficienza:

Un polinomio $Q(x)$ è non indefinito se il sistema (6) nelle n incognite e v ammette soluzioni *positive* — per un assegnato polinomio $f(x)$ i cui oefficienti verifichino le (5).

Sempre nuove fonti di polinomi non indefiniti — sulla base di un poli-omio $f(x)$ sodisfacente (5) — ed altrettanti criteri di sufficienza potremo tenere scambiando, solo in parte, in uno o più trinomi della formazione recedente, i coefficienti estremi, non solo, ma anche combinando con le u e v le due $\left(\frac{n}{2}\right)$ —ple di trinomi già viste, tenendo, o meno, conto della sservazione iniziale.

Anche in questo caso più complesso, poi, può porsi la questione, analoga quella già sviluppata, allorquando intervenivano le sole u, di riconoscere, ato il polinomio $Q(x)$, se, rispetto ad un polinomio $f(x)$, Q si trovi nelle ondizioni attualmente esaminate.

I coefficienti a_r di $f(x)$, oltre a verificare le (5), anche ora, dovranno oddisfare le (6). Pertanto occorrerà determinare $2\left(\frac{n}{2}\right)$ — ple di valori positivi per le u e per le v, sì che le (6) siano soddisfatte.

In conseguenza, determinate le u e le v, potremo esplicitare le a_r.

Sui momenti di una variabile casuale somma di variabili dipendenti

Nota del dott. **T. Salvemini**, *presentata dal socio corr.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 3 aprile 1937 - XV).

Sunto. — Si estende la validità di alcuni teoremi fondamentali del Calcolo delle probabilità, e si fa vedere sotto quali condizioni una funzione definita non negativa può rappresentare la legge di frequenza di fenomeni che si possono ricondurre a schemi di estrazioni da un'urna, ove queste estrazioni sono dipendenti tra loro o indipendenti r a r.

1. Sia $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ una successione illimitata di variabili casuali, ciascuna delle quali assuma il valore *uno* se si verifica un evento di probabilità p e il valore *zero* se si verifica l'evento contrario di probabilità $q = 1 - p$.

La variabile casuale

$$X_i = Y_i - p$$

avrà pertanto il valor medio nullo.

Poniamo

$$\nu_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n .$$

Se le Y_i e quindi anche le X_i sono indipendenti due a due, tre a tre, $\ldots, r$ a r, senza esserlo $r+1$ a $r+1$, i valori medî della potenza s^{esima} $(s = 1, 2, \ldots, r)$ dello scarto della ν_n dal suo valor medio np, coincidono, evidentemente, con i corrispondenti valori medî che si hanno nel problema delle prove ripetute.

Questa eguaglianza di valori medî si ha pure nel seguente caso.

Supponiamo che gli eventi da cui dipendono i valori delle Y_i siano dipendenti tra loro, nel senso che la probabilità che h qualunque di esse $Y_{i_1}, Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_h}$ assumano il valore *uno* non sia p^h ma $p^h + \delta_{i_1 i_2 \ldots i_h}$ con $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_h}$ costante positiva, negativa o, eventualmente, nulla. Assumeremo le stesse quantità a misura della dipendenza intercedente tra le corrispondenti variabili $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_h}$. Poniamo

$$\delta^*_{h,n} = \Sigma \delta_{i_1 i_2 \ldots i_h} \qquad (h \geq 2)$$

dove la sommatoria è estesa alle combinazioni semplici della classe h dei numeri $1, 2, \ldots, n$.

Il valore medio della potenza s^{esima} $(s \geq 2)$ dello scarto della ν_n dal suo

ulore medio dipenderà ovviamente dai $\delta^*_{h,n}$ $(h = 2, 3, \ldots, s)$, ma se

$$\delta^*_{h\ n} = 0 \qquad (h = 2, 3, \ldots, s)$$

enza che siano nulli tutti i $\delta_{i_1\ i_2 \ldots i_h}$, cioè senza che le Y_i siano indipenenti tra loro, detto valor medio coinciderà, evidentemente, con il valor edio della potenza s^{esima} dello scarto che si ha nel problema delle prove petute. Pertanto il ben noto teorema [1])

$$\lim_{n\to\infty} M\left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2\{M(X_1^2) + \ldots + M(X_n^2)\}}}\right]^s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^s e^{-x^2}\, dx$$

alevole nel caso che le X_i siano totalmente indipendenti tra loro e sotto ondizioni abbastanza larghe, *sussiste anche, sotto le stesse condizioni,*

1) *per* $s = 1, 2, \ldots, r$ *quando le* X_i *sono indipendenti* r *a* r *senza sserlo* r + 1 *a* r + 1;

2) *quando, pur essendo le* X_i *dipendenti tra loro, è*

$$\lim_{n\to\infty} \delta^*_{h,n} = 0 \qquad \text{per} \quad h = 2, 3, \ldots, s.$$

Egualmente si può estendere la validità di parecchi altri teoremi di Calcolo delle probabilità, di quelli che considerano appunto una variabile casuale somma di più variabili indipendenti.

2. Sia ora $y = f(x)$ una funzione definita non negativa della variabile reale x, tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1\ [2]).$$

Ad uno scarto *ridotto* della v_n compreso tra x e $x + dx$ facciamo corrispondere, come probabilità, $f(x)\, dx$. Se n è sufficientemente grande e consideriamo tutti i valori reali di x, da $-\infty$ a $+\infty$, per la proprietà precedente rilevata, abbiamo che se le X_i sono indipendenti r a r, senza esserlo $r + 1$ a $r + 1$, o se, essendo le X_i dipendenti nel senso detto, le costanti che misurano la dipendenza soddisfino le (2), la $f(x)$ deve soddisfare alle seguenti condizioni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^s e^{-x^2}\, dx \qquad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

---

[1]) G. Castelnuovo, *Calcolo delle probabilità*, art. I dell'appendice al II volume' Zanichelli, Bologna.

[2]) Se i limiti di variabilità della x in $f(x)$ sono finiti (a, b) possiamo continuare a considerare, negli integrali che ci servono, i limiti infiniti assumendo $f(x) = 0$ per $x < a$ e $x > b$.

Abbiamo dunque: *una funzione* $y = f(x)$, *definita non negativa della variabile reale* x, *rappresenta la legge di distribuzione delle frequenze dello scarto ridotto di una variabile casuale somma di un numero illimitato di variabili* Y_i — *con queste* Y_i *indipendenti* r *a* r *senza esserlo* r + 1 *a* r + 1, *oppure con le* Y_i *dipendenti nel senso detto, ma tali che siano soddisfatte le* (2) — *quando i momenti* s^{esimi} $(s \leq r)$ *della* $f(x)$ *coincidono con gli analoghi momenti della funzione che esprime la legge normale ridotta delle probabilità.*

Ne segue, in particolare, che per vedere se una successione di funzioni dipendenti da un parametro t, e che abbia finiti tutti i suoi momenti dei diversi ordini, tende, mentre t tende a un certo limite τ, verso la funzione della legge normale delle probabilità [1]), non basta verificare la convergenza dei primi n momenti della successione data verso i corrispondenti momenti che si hanno nella legge normale, ma bisogna verificare la convergenza di *tutta la serie infinita di momenti dei diversi ordini* della distribuzione data verso i corrispondenti momenti della legge normale delle probabilità.

Osserviamo, inoltre, che qualunque funzione definita non negativa e integrabile tra $-\infty$ e $+\infty$, si può far soddisfare alla (3) e alla prima delle (4): basta infatti far variare la $f(x)$ di un coefficiente di proporzionalità e, con un cambiamento di variabile, prendere i valori della variabile indipendente a partire dal valore medio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

della funzione data. Pertanto qualunque funzione del tipo detto può essere curva di frequenza di fenomeni che si possono ricondurre a schemi di sorteggi dipendenti tra loro nel modo più generale.

La famiglia di curve $y = f(x)$ che oltre alla (3) soddisfa anche alle equazioni integrali ottenute dalla (4) per $s = 1, 2, \ldots, r$ [2]) può rappresentare la curva di frequenze di fenomeni che possono ricondursi a schemi di sorteggi da un'urna in modo che le estrazioni siano o r a r indipendenti senza esserlo $r+1$ a $r+1$, oppure dipendenti tra loro ma in modo che siano soddisfatte le (2).

Per ogni valore di r $(r = 1, 2, \ldots)$ si hanno r di tali equazioni integrali da soddisfare, e corrispondentemente si ha una determinata famiglia di curve.

---

[1]) Cfr. ad es. G. Sansone, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale.* Vol. II, Zanichelli, Bologna, Cap. V, Teor. 27, o i lavori originali del Cantelli ivi citati, o il volume del Castelnuovo già citato.

[2]) L'integrale del secondo membro assume, come è noto, il valore *zero* per s dispari e il valore $\frac{1 \cdot 3 \ldots (s-1)}{2^{s/2}}$ per s pari.

Su di un'aftitalite cupro-manganesifera vesuviana

Nota del dott. **Gino Bianchini**, *presentata dal socio corr.* **E. Quercigh**

(Adunanza del dì 3 aprile 1937 - XV)

Sunto. — Coll'esame microscopico e chimico delle varie porzioni di una recente formazione aftitalitica del Vesuvio si porta un contributo alla conoscenza di questo interessante minerale, del quale si possiedono finora poche ricerche analitiche complete ed eseguite su materiale sicuramente omogeneo.

È merito di Arcangelo Scacchi (1870), l'aver stabilito che l'aftitalite non doveva confondersi, come allora generalmente si faceva, col solfato di potassio puro (trimetrico), nè poteva considerarsi una modificazione polimorfa del medesimo, ma che, invece, il minerale contiene sempre notevoli quantità di solfato sodico in proporzioni variabilissime, che esso si caratterizza sicuramente per il fatto di essere trigonale, non solo, ma che è appunto la presenza del composto sodico che conferisce all'insieme dei due sali la proprietà di cristallizzare in forme romboedriche [1]).

Però, malgrado l'interesse che può presentare una fase naturale cristallograficamente ben definibile, ma di composizione chimica variabile entro limiti così vasti come quelli constatati successivamente da A. Scacchi [2]) sulle aftitaliti vesuviane e da altri su quelle di altre località, e l'avvenuta constatazione che i cristalli di questo minerale contengono talvolta quantità subordinate di composti di calcio, piombo, ferro, rame, manganese, cloro ed ammonio, che non sempre nè tutti vi si trovano allo stato di inclusione, ma spesso in soluzione solida, le nostre cognizioni analitiche specialmente per quanto riguarda le aftitaliti di origine vulcanica, sono tuttora assai scarse ed incomplete, perchè le analisi per lo più non furono condotte su materiale scelto accuratamente al microscopio onde eliminare le piccole quantità di fasi estranee incluse ed ottenere dei risultati riferibili ad un materiale che si possa ritenere, con buona approssimazione, come omogeneo.

Questa deficienza di dati precisi sulla composizione delle fasi aftitaliticche di origine pneumatolitica, quali sono quelle prodotte dall'attività vulcanica, è in parte imputabile al fatto che il composto fondamentale dell'aftitalite forma facilmente, con diversi altri sali, delle soluzioni solide in proporzioni più o meno limitate, alcune delle quali sono completamente stabili solo alle temperature elevate alle quali si formano e cristallizzano, e

---

[1]) A. Scacchi, Atti R. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli Vol. V (1873), N. 3, pag. 29.

[2]) A. Scacchi, Atti R. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli Vol. VI (1875), N. 9, pag. 48.

perciò, durante il loro raffreddamento subiscono degli smistamenti, almeno parziali, i quali determinano nella massa cristallina una eterogeneità assai superiore a quella che poteva esistere in origine per eventuali inclusioni avvenute durante la formazione del minerale, e limitano notevolmente la possibilità di isolare, alla temperatura ordinaria, un materiale privo di inclusioni per le ricerche analitiche.

Così, per riferirsi al Vesuvio, lo Scacchi nell' analizzare le aftitaliti formatesi negli anni 1868, 1870 e 1872, notò la spiccata eterogeneità di alcuni dei materiali studiati, ma essendo la sua attenzione rivolta principalmente a stabilire la variabilità del rapporto fra solfato di sodio e solfato di potassio nel minerale, egli non approfondì il problema dei componenti subordinati solubili od insolubili in acqua dei cristalli studiati; in seguito il Casoria [1]) si occupò di numerosi prodotti salini formatisi nelle eruzioni vesuviane del periodo 1891-1899, ma non diede indicazione alcuna sulla omogeneità delle sostanze studiate, per cui si deve ritenere con ogni probabilità che le sue siano analisi totalitarie delle formazioni che egli ebbe a sua disposizione, ciò che d' altra parte sembra confermato anche da un esame degli stessi risultati analitici da lui ottenuti. Una scelta accurata della sostanza che al microscopio appariva trasparente ed omogenea fu eseguita dallo Zambonini [2]) per analizzare l' aftitalite cilestrina del 1919 e quella cilestrino-verdastra del 1870; per la prima ogni sforzo per allontanare completamente la ferrinatrite gli riuscì vano, resta però dimostrato per entrambe la presenza dei solfati di rame e di piombo allo stato di soluzioni solide.

Queste sono le due sole aftitaliti vesuviane per le quali l'osservazione microscopica ha servito ad isolare per quanto è possibile del materiale omogeneo destinato all'analisi, facilitando un'esatta interpretazione dei risultati analitici; non mi è sembrato quindi privo di interesse lo studio di una masserella aftitalitica raccolta su una frattura della lava del dicembre 1933 nella valle dell'Inferno a breve distanza dall'orlo del cratere, avendo osservato che le incrostazioni cristalline bianche con aree di color cilestrino più o meno intenso e tendente al verdastro che la costituiscono sono tutte esenti da quella opalescenza perlacea che rivela, nelle aftitaliti di origine pneumatolitica, l' avvenuto smescolamento di soluzioni solide.

Nel suo complesso la massa ha struttura granulare ma qua e là si notano delle formazioni bacillari ipoparallele che sono poco comuni nella aftitalite vesuviana, vi mancano, invece, completamente le caratteristiche laminette esagonali illustrate da A. Scacchi e da Zambonini.

I granuli, siano essi bianchi o colorati, in cui si scompone la massa,

---

[1]) E. Casoria, Annali R. Scuola Sup. di Agric. Portici, 2 (1903), IV, N. 4.

[2]) F. Zambonini, Boll. R. Comitato Geol. d' Italia, XLVII (1920-21), N. 3; *Mineralogia Vesuviana*, 1935, pag. 133.

nno contorno irregolare, quantunque da essi si possano opportunamente avare dalle lamine di sfaldatura secondo il pinacoide base le quali perettono di constatare al conoscopio l'uniassicità positiva del minerale; i mmenti esaminati al microscopio appaiono limpidi, trasparenti, omogenei, solo talvolta contengono qualche inclusione opaca, per cui non risultò ficile per quanto laboriosa, la cernita e la raccolta di un materiale privo inclusioni microscopiche ed in quantità sufficiente per l'analisi sia dalle rzioni incolore che di quelle più intensamente colorate.

Le accennate formazioni bacillari e colonnari sono fortemente colorate l'estremità libera, incolore alla base e per la loro superficie matta ed perfettamente piana, in qualche punto quasi rugosa, come pure per quanto sulta dall'osservazione microscopica, mostrano di essere degli aggregati accrescimento isorientati, effettuatisi con spiccata preferenza nella direone dell'asse ternario; anche qui si può osservare microscopicamente tanto uniassicità positiva sulle laminette di sfaldatura, la quale avviene secondo piano normale all'allungamento, quanto la trasparenza e l'omogeneità i tutti i frammenti, con scarsezza di inclusioni, ed è stato possibile di olare un materiale scevro da queste, tanto dalle parti colorate che da uelle incolore.

Una separazione coi liquidi pesanti risulta meno pratica di quella fatta base alla colorazione, perchè il peso specifico varia di pochissimo nelle iverse parti della massa, siano esse colorate o no, e si manifesta compreso ntro i limiti: 2.698-2.701.

I saggi qualitativi mostrano che questa aftitalite contiene il manganese llo stato manganoso e che nelle porzioni colorate oltre ad una maggiore uantità di rame vi sono tracce di cloro. L'analisi quantitativa delle quattro orzioni separate ha dato i risultati contenuti nella seguente tabella in cui:

I si riferisce alla porzione granulare incolora
II » » » cilestrino-verdastra
III » » colonnare incolora
IV » » » cilestrino-verdastra

	I	II	III	IV
Na	13.35	14.14	15.59	14.99
K	25.73	23.24	22.46	22.68
Mn	0.45	0.61	0.56	0.53
Cu	0 05	1.13	0.07	0.65
SO_4	60.18	60.51	61.22	60.87
Cl	—	0.16	—	0.10
	99.76	99.79	99.90	99.82

Dall'esame di questi dati risulta che il sodio ed il potassio variano

notevolmente nei diversi punti della formazione aftitalitica anche se questi come nel caso presente, non distano di molti centimetri fra di loro nella massa originaria, così pure è variabile proporzionalmente in modo assai più marcato il contenuto in rame, mentre il manganese non subisce forti oscillazioni nelle varie porzioni esaminate; circa la presenza del cloro resta confermato che essa si collega all'accentuarsi del contenuto in rame. Si può anche notare che il rapporto K : Na nelle porzioni incolore e colorate delle associazioni bacillari è molto vicino ciò che non si verifica nella massa granulare in cui esiste anche una maggior quantità di potassio e nelle parti colorate una maggior ricchezza in rame; si tratta ovviamente di variazioni accidentali connesse al processo di formazione.

Prendendo come base di calcolo le percentuali dei cationi dosati e considerandoli, per semplificazione, tutti legati al solo acido solforico (data l'esigua quantità di cloro, la quale, comunque si voglia interpretare, non sposterebbe sensibilmente i rapporti fra i vari solfati), si ottengono rispettivamente le seguenti proporzioni dei medesimi, nelle aftitaliti analizzate:

	I	II	III	IV
Na_2SO_4	41.24	43.66	48.14	46.31
K_2SO_4	57.34	51.80	50.05	50.54
$MnSO_4$	1.25	1.68	1.55	1.47
$CuSO_4$	0.12	2.84	0.18	1.62
	99.95	99.98	99.92	99 94

Quantunque in diverse aftitaliti di origine pneumatolitica il solfato di sodio prevalga su quello potassico, come lo provano tanto alcune analisi di A. Scacchi su qualche formazione vesuviana, quanto quella di G. Ponte sull'aftitalite dell'Etna [1]) e quella di Washington e Merwin sul minerale del Kilauea [2]), in questo minerale vesuviano del 1933 si verifica, invece, una prevalenza del solfato potassico. Ciò è stato notato spesso al Vesuvio sia dallo Scacchi, che, in seguito, da Casoria e da Zambonini, mentre una più spiccata preponderanza del sale potassico è caratteristica comune delle aftitaliti formatesi per cristallizzazione da soluzioni acquose a temperatura ordinaria, dalle quali, come lo Scacchi mise in evidenza fin dal 1862-63, un eccesso di solfato sodico provoca la formazione della mirabilite invece di determinare un aumento della sua concentrazione nell'aftitalite [3]).

---

[1]) G. Ponte, Rend. R. Acc. Lincei, 5.ª, 28 (1919), I sem., pag. 362.

[2]) H. S. Washington e H. E. Merwin, American Mineralogist 6 (1923), pag. 121.

[3]) A. Scacchi, Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli (1862), pag. 12; Atti R. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli, Vol. I (1863), pag. 46.

Il manganese fu notato nelle aftitaliti vesuviane già da Monticelli e ovelli [1]), ed in seguito constatato nelle parti solubili ed anche in quelle solubili dallo Scacchi, ma non fu dosato quantitativamente, il solfato manoso non può trovarsi qui come inclusione sotto forma di manganolangbeite ($K_2Mn_2(SO_4)_3$) perchè questa sarebbe facilmente rilevata dalla sua onorifrangenza; il rame è assai più frequente del manganese nelle aftitai e fu esso pure riscontrato da A. Scacchi tanto nelle porzioni solubili ie in quelle insolubili in acqua dei cristalli del 1872 ed in seguito, assieme piombo, da Zambonini in quelli del 1919 e del 1870. Però mentre le porioni insolubili in acqua osservate da Scacchi dovevano evidentemente esre costituite da qualche solfato basico incluso, il solfato ramico normale olubile dei materiali del 1919 e del 1860, scelti microscopicamente da Zamonini, e dei miei, che furono isolati con le stesse precauzioni, deve formare oluzioni solide coll'aftitalite, poichè non è ammissibile che esso possa assare inavvertito come inclusione al microscopio, tanto più che in tale aso, il solfato ramico non si troverebbe come tale, bensì come sale doppio ol solfato di potassio e di sodio, offrendo maggior possibilità di farsi notare a per l'aumentata massa dell'incluso, che per l'intensa colorazione catteristica di questi sali doppi che spiccherebbero nettamente nella soanza includente.

Il solfato ramico in quantità, minori o vicine a quelle constatate nelle orzioni più colorate di questa aftitalite, fu riscontrato anche da Washington Merwin nella aftitalite del Kilauea e da Ponte in quella dell'Etna, mentre ambonini in quella vesuviana del 1919 ne trovò il 4,6%, mettendo in evienza una maggiore solubilità allo stato solido di questo composto in quello ell'aftitalite alla temperatura ordinaria.

La presenza di piccole quantità di cloro spesso volte constatata nelle ftitaliti è evidentemente connessa alla origine pneumatolitica del minerale ie come è noto deriva per lo più dalla trasformazione dei cloruri in solfati er l'azione dei prodotti vulcanici gassosi ricchi in anidride solforica; così spiega pure facilmente la variabilità di concentrazione dei componenti ei diversi punti, anche vicini, delle diverse soluzioni solide.

I composti che risultano finora accertati allo stato di soluzione a temperatura ordinaria nelle aftitaliti vesuviane, oltre ai solfati di sodio e potassio iessi in evidenza fin dalle prime ricerche dello Scacchi, sono i solfati di iombo, di rame e di manganese; rimane aperta la quistione dei composti i calcio, di ferro, ecc., che richiederà un riesame, oltre che dei dati raccolti proposito dagli sperimentatori precedenti, anche possibilmente dei maeriali originali da essi studiati e di quelli formati in seguito.

Istituto di Mineralogia della R. Università di Napoli.

---

[1]) T. Monticelli e N. Covelli, *Prodromo della Mineralogia Vesuviana*. Napoli 825, pag. 317.

Teoremi e problemi sulle funzioni iperarmoniche trattati col metodo degli operatori lineari

Nota del prof. **A. Colucci**, *presentata dal socio* **E. Pascal**

(Adunanza del dì 1. maggio 1937 - XV)

Sunto. — Si utilizzano speciali operatori lineari per ottenere l'estensione alle funzioni iperarmoniche di alcuni notevoli risultati della teoria delle funzioni armoniche.

In una recente Memoria intitolata: *Nuovi indirizzi di ricerca nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di talune equazioni lineari alle derivate parziali della Fisica-matematica* [1]) il Picone si è occupato, principalmente, di estendere alle funzioni *iperarmoniche* (o *poliarmoniche*) in due e in tre variabili i più importanti risultati relativi alla teoria delle ordinarie funzioni armoniche.

Lo studio di un problema posto da questo Autore circa la rappresentazione di una funzione iperarmonica a mezzo di armoniche, e la successiva estensione dei risultati conseguiti al caso di un numero qualunque di variabili, palesatasi possibile mediante l'impiego di certi operatori lineari, mi fecero nascere il convincimento che da tali operatori si poteva trarre partito per una più abbondante messe di risultati.

Col presente lavoro e con un altro successivo riunisco in un tutto organico quanto di notevole mi è sembrato avere ottenuto finora nel campo delle funzioni iperarmoniche, studiate con il metodo degli operatori lineari.

1. Siano $x_1, x_2, \ldots, x_h$ le coordinate di un punto generico P dello spazio $\mathbf{S}_h$ (euclideo) a h dimensioni.

Una funzione reale $u(x_1, x_2, \ldots, x_h)$ definita in un dominio $\mathbf{D}$ di $\mathbf{S}_h$, dicesi n-iperarmonica in $\mathbf{D}$ se è ivi continua con le sue derivate parziali dei primi $2n$ ordini e verifica l'equazione

$$\Delta^n u = \sum \frac{n!}{i_1!\, i_2! \ldots i_h!} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1^{2i_1} \partial x_2^{2i_2} \ldots \partial x_h^{2i_h}} = 0$$

$$(i_1 + i_2 + \ldots + i_h = n).$$

---

[1]) *Annali della R. Scuola Normale di Pisa* (Scienze Fisiche e Matematiche) S. II, Vol. V (1936 - XIV).

er $n = 1$ si ricade sulle ordinarie funzioni armoniche, integrali della clas-
ca equazione di LAPLACE.

Nello studio di questioni del genere di quelle qui trattate giova espri-
ere le coordinate del punto P per mezzo di formole del tipo

$$x_i = \rho\, X_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{h-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

)n

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_h^2 = 1;$$

oi infatti, posto per comodità

$$h = m + 2,$$

remo uso di coordinate polari $(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_m, \varphi)$, notoriamente definite dalle
lazioni

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos\theta_1, \\
x_2 &= \rho \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_m &= \rho \operatorname{sen}\theta_1 \ldots \operatorname{sen}\theta_{m-1} \cos\theta_m, \\
x_{m+1} &= \rho \operatorname{sen}\theta_1 \ldots \operatorname{sen}\theta_{m-1} \operatorname{sen}\theta_m \cos\varphi, \\
x_{m+2} &= \rho \operatorname{sen}\theta_1 \ldots \ldots \operatorname{sen}\theta_m \operatorname{sen}\varphi
\end{aligned}$$

$$(0 \leq \theta_i \leq \pi, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m); \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

ppure di coordinate zonali $(\rho, z_1, \ldots, z_m, \varphi)$, legate alle cartesiane dalle
quazioni

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho z_1, \\
x_2 &= \rho z_2, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
x_m &= \rho z_m, \\
x_{m+1} &= \rho \sqrt{Z_m} \cos\varphi, \\
x_{m+2} &= \rho \sqrt{Z_m} \operatorname{sen}\varphi
\end{aligned}$$

con

$$Z_m = 1 - z_1^2 - \ldots - z_m^2 \geq 0, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Con ciò, ad un punto P di $\mathbf{S}_h$ vengono ad associarsi, in modo del tutto naturale, un punto $Q(\theta_1, \ldots, \theta_m, \varphi) \equiv Q(z_1, z_2, \ldots, z_m, \varphi)$ della ipersfera di raggio uno e di centro O ed un numero reale (non negativo) ρ: scriveremo adunque

$$P \equiv (\rho, Q).$$

Nei ricordati sistemi di coordinate, l'operatore Δ è definito dalla relazione

$$(1) \qquad \rho^2 \Delta u = \frac{1}{\rho^{m-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{m+1} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \mathsf{L}(u)$$

dove [1])

$$\mathsf{L}(u) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta_1 \dots \operatorname{sen}^2\theta_m} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta_1 \dots \operatorname{sen}^2\theta_{i-1}} \frac{1}{\operatorname{sen}^{m+1-i}\theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\operatorname{sen}^{m+1-i}\theta_i \frac{\partial u}{\partial \theta_i} \right) =$$

$$- \frac{1}{Z_m} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial}{\partial z_i} \left[\frac{\partial u}{\partial z_i} - z_i \left(z_1 \frac{\partial u}{\partial z_1} + \dots + z_m \frac{\partial u}{\partial z_m} \right) \right].$$

Introdotti accanto a L gli operatori

$$\mathsf{T} = \rho^2 \Delta \quad , \quad \Omega = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$$

l'equazione (1) assume la forma notevole

$$\mathsf{T}(u) = \Omega^2(u) + m\Omega(u) + \mathsf{L}(u).$$

Scriveremo anche

$$\mathsf{T} = \Omega^2 + m\Omega + \mathsf{L}$$

o, il che equivale

$$\mathsf{T} = \frac{\partial^2}{\partial l^2} + m \frac{\partial}{\partial l} + \mathsf{L}$$

dove evidentemente $l = \log \rho$. Applicheremo tali operatori all'insieme delle funzioni $u, v, \dots$ di $P \equiv (\rho, Q)$ definite in un comune dominio di S_h e ivi *regolari*, cioè continue con le loro derivate parziali rispetto a ρ ed alle coordinate di Q, fino a quelle di un certo ordine, il quale dipende dalla questione che si tratta.

Osserviamo innanzitutto che *gli operatori in esame sono lineari; che* Ω *e* L *sono permutabili, e quindi tali sono anche* Ω *e* T.

Qualunque sia la costante α si ha

$$\Omega^k (\rho^\alpha u) = \rho^\alpha (\Omega + \alpha)^k (u);$$
$$(k = 1, 2, \dots)$$

---

[1]) P. Appell - J. Kampè de Fériet, *Fonctions hypèrgéométriques et hypersphériques*, p. 203 e p. 213 (Gauthier-Villars, Paris, 1926).

gue che posto

$$\mathsf{T}_\alpha = (\Omega + \alpha)^2 + m(\Omega + \alpha) + \mathsf{L} = \\ = \mathsf{T} + 2\alpha\Omega + \alpha(\alpha + m)$$

ssiste la relazione

$$\mathsf{T}(\rho^\alpha u) = \rho^\alpha \mathsf{T}_\alpha(u)$$

conseguentemente

$$\mathsf{T}_\beta(\rho^\alpha u) = \rho^\alpha \mathsf{T}_{\alpha+\beta}(u). \tag{2}$$

Premesso ciò abbiamo:

$$\Delta^2 u = \rho^{-2}\mathsf{T}[\rho^{-2}\mathsf{T}(u)] = \rho^{-4}\mathsf{T}_{-2}\mathsf{T}_0(u),$$
$$\Delta^3 u = \rho^{-2}\mathsf{T}[\rho^{-4}\mathsf{T}_{-2}\mathsf{T}_0(u)] = \rho^{-6}\mathsf{T}_{-4}\mathsf{T}_{-2}\mathsf{T}_0(u)$$

in generale

$$\rho^{2n}\Delta^n u = \mathsf{T}_{2-2n}\mathsf{T}_{4-2n}\dots\mathsf{T}_{-2}\mathsf{T}_0(u) = \\ = \mathsf{T}_0\mathsf{T}_{-2}\dots\mathsf{T}_{2-2n}(u). \tag{3}$$

Dunque, *se u è n-iperarmonica, deve aversi*

$$\mathsf{T}_0\mathsf{T}_{-2}\dots\mathsf{T}_{2-2n}(u) = 0.$$

È importante rilevare che *se* A *è un operatore lineare, permutabile con* Ω *e* L, *e u è n-iperarmonica, lo è anche* $\mathsf{A}(u)$.

Invero, essendo

$$\mathsf{A}\mathsf{T}_\alpha = \mathsf{T}_\alpha\mathsf{A}$$

ualunque sia la costante α, segue

$$\rho^{2n}\Delta^n[\mathsf{A}(u)] = \mathsf{A}\mathsf{T}_0\mathsf{T}_{-2}\dots\mathsf{T}_{2-2n}(u) = \mathsf{A}(o) = 0.$$

c. d. d.

acendo

$$\mathsf{A} = c_1\Omega + c_2\Omega^2 + \dots + c_\nu\Omega^\nu \\ (\nu = 1, 2, \dots)$$

love le c denotano delle costanti, si ha appunto un operatore permutabile con Ω ed L; perciò: *se u è n-iperarmonica, lo stesso si verifica per*

$$c_1\Omega(u) + \dots + c_\nu\Omega^\nu(u).$$

E poichè, per cose note [1]):

$$\rho^{\nu}\frac{\partial^{\nu}}{\partial\rho^{\nu}} = \Omega(\Omega-1)\dots(\Omega-\nu+1)$$

possiamo dire anche: *se u è n-iperarmonica, lo è pure* $\rho^{\nu}\dfrac{\partial^{\nu}u}{\partial\rho^{\nu}}$, *qualunque sia* ν.

2. Dalla formola (3) risulta che la funzione $u=\rho^{\alpha}\ (\alpha\gtrless 0)$ è n-iperarmonica per i seguenti valori di α:

$$\alpha=-m\ \ ;\ \ \alpha=2k\ \ ;\ \ \alpha=2k-m\qquad (k=1,2,\dots,n-1).$$

È da notare il fatto che il numero delle funzioni (distinte) del tipo in esame non è deducibile, per tutti i valori di m, n, da un'unica formola.

Infatti, tale numero è dato da $n-1$ se $m=0$; da $2n-2$ se $m=2n-2$; da $2n-1$ se m è dispari oppure se m è pari e maggiore di $2n-2$; infine da $n+\dfrac{m}{2}-1$ se m è pari e non maggiore di $2n-4$.

Giova mettere in relazione quanto ora si è detto con la risoluzione del problema seguente: *determinare le funzioni n-iperarmoniche del tipo*

$$\rho^{\alpha}(\log\rho)^{\beta},$$

con α e β costanti qualunque.

Valendosi della (2) si ricava

$$\mathsf{T}_0\mathsf{T}_{-2}\dots\mathsf{T}_{2-2n}[\rho^{\alpha}(\log\rho)^{\beta}] = \rho^{\alpha}\mathsf{T}_{\alpha}\mathsf{T}_{\alpha-2}\dots\mathsf{T}_{\alpha-2n+2}(\log\rho)^{\beta}.$$

Introducendo la variabile $t=\log\rho$ si ha:

$$\mathsf{T}_{\alpha}=\left(\frac{d}{dt}+\alpha\right)\left(\frac{d}{dt}+\alpha+m\right)$$

e quindi

$$\rho^{2n}\Delta^{n}[\rho^{\alpha}(\log\rho)^{\beta}] = e^{\alpha t}f\left(\frac{d}{dt}\right)f\left(\frac{d}{dt}+m\right)t^{\beta},$$

dove

$$f(X)=(X+\alpha)(X+\alpha-2)\dots(X+\alpha-2n+2).$$

---

[1]) Vedasi per es. S. Pincherle, *Contributo alla teoria degli operatori lineari*. Annali di Matematica pura ed applicata. S. IV, Tomo XV (1936), p. 279.

Posto

$$f(X) = X^n + \gamma_1 X^{n-1} + \ldots + \gamma_{n-1} X + \gamma_n ,$$
$$f(X+m) = X^n + \delta_1 X^{n-1} + \ldots + \delta_{n-1} X + \delta_n$$

r la n-iperarmonicità di $\rho^\alpha (\log\rho)^\beta$ deve aversi

$$\begin{aligned} \gamma_n \delta_n &= 0, \\ \gamma_{n-1}\delta_n + \gamma_n \delta_{n-1} &= 0, \\ \gamma_{n-2}\delta_n + \gamma_{n-1}\delta_{n-1} + \gamma_n \delta_{n-2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

Concludiamo che dev'essere $\beta = 0$, e quindi si ricade sulle funzioni ovate precedentemente, oppure $\beta = 1$ e α eguale (se è possibile) ad un umero comune alle due progressioni

$$\begin{gathered} 2k \quad , \quad 2k - m \\ (k = 0, 1, \ldots, n-1). \end{gathered}$$

Così, per $m = 0$, si hanno le funzioni

$$\log\rho , \rho^2 \log\rho , \ldots , \rho^{2n-2} \log\rho$$

per m pari non maggiore di $2n - 2$

$$\log\rho , \rho^2 \log\rho , \ldots , \rho^{2n-2-m} \log\rho .$$

'ertanto: *le funzioni n-iperarmoniche del tipo* $\rho^\alpha (\log\rho)^\beta$ *sono in ogni caso n numero di* $2n - 1$.

3. Domandiamoci ora, più generalmente, quale forma deve avere una unzione $u(\rho)$ della sola variabile ρ affinchè sia soluzione dell'equazione

$$\Delta^n u = 0.$$

Fatto

$$\begin{gathered} \mathsf{T}_{-2k}\mathsf{T}_{-2k-2}\ldots\mathsf{T}_{2-2n}(u) = \varphi_k(\rho) \\ (k = 0, 1, \ldots, n-1) \end{gathered}$$

i tratta di ricavare u dal sistema

$$\mathsf{T}_0\varphi_1(\rho) = \varphi_0 , \mathsf{T}_{-2}\varphi_2(\rho) = \varphi_1(\rho) , \ldots , \mathsf{T}_{2-2n}\varphi_n(\rho) = \varphi_{n-1}$$

love

$$\varphi_0 = 0 , \varphi_n = u ,$$

Premesso che, se v è funzione di sola ρ, l'equazione

$$\mathsf{T}_\alpha(w) = v$$

dà

$$(4) \qquad w = (a + b\rho^{-m})\,\rho^{-\alpha} + \rho^{-\alpha}\int \rho^{-m-1}\,d\rho \int v(\rho)\rho^{\alpha+m-1}\,d\rho,$$

si deduce che se $v(\rho)$ è della forma ρ^{-s}, l'operazione su v indicata da

$$\rho^{-\alpha}\int \rho^{-m-1}\,d\rho \int v(\rho)\,\rho^{\alpha+m-1}\,d\rho$$

fornisce per risultato, a meno di coefficienti costanti, o la funzione stessa, oppure $\rho^{-\alpha}\log\rho$ se $s = \alpha$, o i termini $\rho^{-\alpha-m}$, $\rho^{-\alpha-m}\log\rho$ se $s = \alpha + m$.

Considerando ora che $\varphi_k(\rho)$ si ottiene dalla (4) facendovi $v = \varphi_{k-1}(\rho)$, $\alpha = 2 - 2k$, $a = a_{k-1}$ $b = b_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ segue senz'altro che: *ogni funzione n-iperarmonica dipendente dalla sola variabile ρ è una combinazione lineare a coefficienti costanti di quelle innanzi trovate.*

LLA RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI IPERARMONICHE A MEZZO DI ARMONICHE

Nota del prof. **A. Colucci**, *presentata dal socio* **E. Pascal**

(Adunanza del dì 1 maggio 1937 - XV)

Sunto — Questa nota fa seguito a quella recante il titolo: *Teoremi e problemi lle funzioni iperarmoniche trattati col metodo degli operatori lineari*, pubblicata in questi essi Rendiconti. In essa viene estesa una notevole formola di ALMANSI dalle funoni iperarmoniche in due variabili a quelle in un numero qualunque di variabili, con lo ipotesi molto larghe circa la posizione del polo, che gioca una parte imrtante in detta formola.

I. La formola (3) del lavoro precedente applicata alla funzione $\rho^{\alpha}u$ dà

$$\rho^{2n}\Delta^{n}(\rho^{\alpha}u) = \rho^{\alpha}\mathsf{T}_{\alpha}\mathsf{T}_{\alpha-2}\dots\mathsf{T}_{\alpha-2n+2}(u)$$

onde se

$$\alpha = 2n-2$$

u è armonica, la funzione

$$\rho^{2n-2}u$$

iesce n-iperarmonica.

Pertanto: *se $u_0(\rho, Q), u_1(\rho, Q), \dots, u_{n-1}(\rho, Q)$ sono funzioni armoniche n un comune dominio* **D**, *la funzione*

$$u(\rho, Q) = u_0(\rho, Q) + \rho^2 u_1(\rho, Q) + \dots + \rho^{2n-2}u_{n-1}(\rho, Q)$$

iesce n-iperarmonica in **D**.

Con ciò si ottiene una nota proprietà delle funzioni n-iperarmoniche, la uale sussiste qualunque sia la posizione di O rispetto a **D**.

Inversamente, se $u(P)$ è una funzione n iperarmonica in un dominio **D**, d ogni punto M *interno* a **D** si possono associare n funzioni armoniche, *univocamente determinate*, $u_0(M, P), u_1(M, P), \dots, u_{n-1}(M, P)$ tali che nell' insieme aperto $\mathbf{C}(M)$ costituito dai punti P di **D** per i quali il segmento MP è tutto contenuto in **D**, vale la *formola di* ALMANSI [1])

$$u(P) = \sum_{k}^{0,n-1} \overline{MP}^{2k} u_k(M, P). \tag{1}$$

---

[1]) Cfr. E. ALMANSI, *Sull' integrazione dell' equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. (Annali di Matematica pura ed applicata, vol. II, s. III (1898)).

Picone [2]) nello scorso anno ha dimostrato che se il dominio **D** si suppone a due dimensioni e semplicemente connesso, allora la formola in discorso vale in tutto **D**, comunque si prenda nel piano il punto M. Però, quando tale punto si assume fuori di **D**, le armoniche $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ non sono più univocamente determinate, e il Picone ha nella stessa occasione segnalato agli studiosi l'interessante problema di *estendere il campo nel quale è possibile una decomposizione del tipo* (1) *con un noto grado di indeterminazione degli addendi.*

In una comunicazione fatta dallo scrivente al *I Congresso dell'Unione Matematica Italiana* (tenutosi a Firenze nei giorni 1-3 aprile 1937 - XV), attualmente in corso di stampa, trovasi una completa risposta a tale questione.

Ci proponiamo di estendere qui il problema sopra enunciato al caso delle funzioni n-iperarmoniche in un numero qualunque di variabili.

Si tratta, in sostanza, di integrare il sistema seguente

$$\Delta u_i(\rho, Q) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

$$\Delta^{n-1}[\rho^{2n-2} u_{n-1}(\rho, Q)] = \Delta^{n-1} u(\rho, Q),$$

. . . . . .

$$\Delta^{n-k}[\rho^{2n-2k} u_{n-k}(\rho, Q)] = \Delta^{n-k}[u(\rho, Q) - \rho^{2n-2} u_{n-1}(\rho, Q) - \ldots - \rho^{2n-2k+2} u_{n-k+1}(\rho, Q)],$$

. . . . . .

dove $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ sono le funzioni incognite, e u è una funzione n-iperarmonica nota.

Evidentemente il problema è di natura ricorrente; noi ne faremo dipendere la soluzione da una questione semplice che formuliamo in modo preciso così:

Assegnata una funzione armonica $v(\rho, Q)$ *nel campo descritto dal punto* (ρ, Q) *al variare di* Q *in un dominio* **H** *internamente connesso dell'ipersfera di centro* O *e raggio uno e di* ρ *fra i limiti*

$$\rho_1(Q) < \rho_2(Q) \qquad (\rho_1 \geq 0, 0 < \rho_2 \leq +\infty)$$

dove $\rho = \rho_1(Q), \rho = \rho_2(Q)$ *denotano due funzioni di* Q *regolari in* **H**, *determinare in tale campo una funzione armonica* $u(\rho, Q)$ *tale che*

$$u = \mathbf{T}_\alpha^{-1}(v),$$

α *essendo una costante non nulla e del resto arbitraria.*

Per maggiore semplicità risolveremo tale problema nell'ulteriore ipotesi

---

[2]) M. Picone — *Nuovi indirizzi di ricerca nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di talune equazioni lineari alle derivate parziali della Fisica-matematica.* [Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (Scienze Fisiche e Matematiche), s II, vol. V (1936 - XIV)].

ıe esista una costante r (non negativa) per cui

$$\rho_1(Q) \leq r \leq \rho_2(Q),$$

)munque sia preso il punto Q in **H**.

A cagione della supposta armonicità di u si ha:

$$\mathbf{T}_\alpha(u) = 2\alpha\Omega(u) + \alpha(\alpha+m)u = v$$

a cui

$$u(\rho, Q) = \rho^{-\frac{\alpha+m}{2}} \left[\omega(Q) + \frac{1}{2\alpha} \int_r^\rho v(\rho, Q)\, \rho^{\frac{\alpha+m}{2}-1} d\rho \right].$$

er determinare la funzione $\omega(Q)$ osserviamo che posto

$$\tau = \frac{1}{2\alpha} \int_r^\rho v(\rho, Q)\, \rho^{\frac{\alpha+m}{2}-1} d\rho$$

a condizione $\Delta u(\rho, Q) = 0$ si traduce nell'equazione

$$\mathbf{L}(\omega) + \frac{\alpha^2 - m^2}{4}\omega = \chi \tag{2}$$

ove

$$\chi = -\mathbf{T}(\tau) + (\alpha+m)\Omega(\tau) - \frac{\alpha^2-m^2}{4}\tau.$$

a (2) è un'equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine, di ipo ellittico, la quale ci determinerà la funzione ω. Ma prima di procedere ltre bisogna esplicitare la χ, onde assicurarsi che essa non dipende da ρ.

Invero, partendo dall'ipotesi secondo la quale

$$\Omega^2(v) + m\Omega(v) + \mathbf{L}(v) = 0,$$

noltiplicando per $\frac{1}{2\alpha}\rho^{\frac{\alpha+m}{2}-1}$ ed integrando fra i limiti r e ρ troviamo:

$$\frac{1}{2\alpha} \int_r^\rho [\Omega^2(v) + m\Omega(v)]\, \rho^{\frac{\alpha+m}{2}-1} d\rho + \mathbf{L}(\tau) = 0$$

e poichè

$$\int_r^\rho \Omega^2(v)\, \rho^{\frac{\alpha+m}{2}-1} d\rho = \left[\rho^{\frac{\alpha+m}{2}} \frac{\partial v}{\partial \rho} \right]_r^\rho - \frac{\alpha+m}{2} \int_r^\rho \rho^{\frac{\alpha+m}{2}-1} \Omega(v)\, d\rho$$

$$\int_r^\rho \rho^{\frac{\alpha+m}{2}-1} \Omega(v)\, d\rho = \left[\rho^{\frac{\alpha+m}{2}} v \right]_r^\rho - \frac{\alpha+m}{2} \int_r^\rho \rho^{\frac{\alpha+m}{2}-1} v\, d\rho.$$

Sostituendo sopra si trova

$$\frac{1}{2\alpha}\left\{\rho^{\frac{\alpha+m}{2}+1}\frac{\partial v}{\partial\rho}-\left(\rho^{\frac{\alpha+m}{2}}\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)^{*}-\frac{\alpha-m}{2}\left[\rho^{\frac{\alpha+m}{2}}v-\left(\rho^{\frac{\alpha+m}{2}}v\right)^{*}\right]-\right.$$
$$\left.\frac{\alpha^2-m^2}{4}\int_r^{\rho} v\rho^{\frac{\alpha+m}{2}-1}d\rho\right\}+\mathsf{L}(\tau)=0$$

dove per brevità, con l'asterisco sulla parentesi a mo' di esponente si vuole intendere che nella funzione in essa contenuta bisogna porre $\rho=r$.

D'altra parte

$$\chi=-\Omega^2(\tau)+\alpha\Omega(\tau)-\mathsf{L}(\tau)-\frac{\alpha^2-m^2}{4}\tau$$

onde sviluppando $\Omega(\tau),\Omega^2(\tau)$ e sommando con la precedente si ha:

$$\chi=\frac{r^{\frac{\alpha+m}{2}}}{2\alpha}\left[(2\alpha-2m)v^{*}-r\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)^{*}\right] \tag{3}$$

e questa prova appunto che χ non dipende da ρ: $\chi=\chi(Q)$.

Fatto ora

$$\mu=\frac{\alpha-m}{2}$$

ed indicata con φ una *qualunque* soluzione dell'equazione (2), per ogni altra soluzione ω di essa si ha

$$\omega=\varphi+\psi$$

dove ψ verifica l'equazione omogenea

$$\mathsf{L}(\psi)+\mu(\mu+m)\psi=0.$$

Pertanto: ψ *è la funzione ultrasferica d'ordine* μ *dello spazio* S_{m+2}.

Se $\chi(Q)$ per Q variabile in H ammette uno sviluppo della forma

$$\chi(Q)=\sum_{i=0}^{i=\infty}Y_i(Q) \tag{4}$$

dove $Y_i(Q)$ denota la funzione ultrasferica d'ordine i, la soluzione particolare φ della (2) la potremo rappresentare (almeno formalmente) con

$$\varphi(Q)=\sum_{i=0}^{i=\infty}a_i\,Y_i(Q)$$

ove

$$a_i = \frac{1}{(\mu - i)(\mu + i + m)}.$$

Se **H** invade tutta l'ipersfera, sfruttando le note relazioni di ortogonalità intercedenti tra le funzioni ultrasferiche, la (4) porge

$$Y_i(Q) = \frac{(2i+m)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}+1}} \int_S \chi(Q')\, V_i^{(m)}(\cos\gamma) d\sigma$$

ove S denota la frontiera della ipersfera, Q' il punto corrente su questa, $d\sigma$ l'elemento d'area dato da

$$\operatorname{sen}^m\theta_1 \operatorname{sen}^{m-1}\theta_2 \dots \operatorname{sen}\theta_m d\theta_1 \dots d\theta_m d\varphi = dx_1 \dots dx_m d\varphi,$$

γ l'angolo dei raggi OQ, OQ' e $V_i^{(m)}(\cos\gamma)$ il coefficiente di x^i nello sviluppo di

$$(1 - 2x\cos\gamma + x^2)^{-\frac{m}{2}}.$$

Ritornando alla $u(\rho, Q)$, osserviamo che se

$$r = 0, \qquad \alpha + m \geq 2$$

$v(\rho, Q)$ è continua in O secondi i raggi OQ proiettanti da O i diversi punti di **H**, il limite di $u(\rho, Q)$ per $\rho \to 0$ è finito (e determinato), purchè $\omega(Q) \equiv 0$ in tutto **H**.

2. Applichiamo le cose dette innanzi alla determinazione di u_{n-1}. Abbiamo:

$$\mathbf{T}_{2n-2}\, \mathbf{T}_{2n-4} \dots \mathbf{T}_2 (u_{n-1}) = \Delta^{n-1} u(\rho, Q).$$

A quest'equazione possiamo sostituire il sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 \quad (v_{n-2}) &= v_{n-1}, \\ \mathbf{T}_4 \quad (v_{n-3}) &= v_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{T}_{2n-2}(v_0) \quad &= v_1, \end{aligned}$$

con

$$v_{n-1} = \Delta^{n-1} u \quad , \quad v_0 = u_{n-1}.$$

Segue che

$$v_{k-1} = \rho^{k-n-\frac{m}{2}} \left[\omega_k(Q) + \frac{1}{4(n-k)} \int_r^\rho \rho^{n-k-1+\frac{m}{2}} v_k(\rho, Q)\, d\rho \right]$$

$$(k = n-1, n-2, \ldots, 1)$$

dove le

$$\omega_k(Q) = \omega_k(\theta_1, \ldots, \theta_m, \varphi) \equiv \omega_k(z_1, \ldots, z_m, \varphi)$$

verificano le equazioni

$$\mathbf{L}(\omega_k) + \left[(n-k)^2 - \frac{m^2}{4} \right] \omega_k = \chi_k(Q)$$

con

$$\chi_k(Q) = \frac{r^{n-k+\frac{m}{2}}}{4(n-k)} \left[\left(n-k-\frac{m}{2} \right) v_k^* - r \left(\frac{\partial v_k^*}{\partial \rho} \right) \right].$$

Da quanto precede ricaviamo:

$$u_{n-1} = \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{T}_4^{-1} \ldots \mathbf{T}_{2n-2}^{-1} (v_{n-1}$$

cioè

$$u_{n-1}(\rho, Q) = \rho^{1-n-\frac{m}{2}} \left\{ \omega_1(Q) + \frac{\omega_2(Q)}{1!\,4\,(n-1)} (\rho - r) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_{n-1}(Q)}{(n-2)!\,4^{n-2}(n-1)\ldots 2} (\rho - r)^{n-2} + \frac{1}{4^{n-1}(n-1)!} \int_r^\rho \Delta^{n-1}(\rho, Q)\, \rho^{\frac{m}{2}}\, d\rho^{n-1} \right\}$$

dove ovviamente

$$\int_r^\rho \rho^{\frac{m}{2}} \Delta^{n-1}(\rho, Q)\, d\rho^{n-1} = \int_r^\rho dr_1 \int_r^{r_1} dr_2 \ldots \int_r^{r_{n-2}} r_{n-1}^{\frac{m}{2}} \Delta^{n-1}(r_{n-1}, Q)\, dr_{n-1}.$$

Nel caso in cui $r = 0$, dalla continuità di $\Delta^{n-1} u$ in O, e da quella richiesta per u_{n-1}, segue che deve essere

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega \equiv 0,$$

in $\mathbf{H}$.

In particolare ciò deve verificarsi quando O è interno al campo, ed alle funzioni $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ si impone la condizione di essere regolari in tale punto.

Utilizzando la (3) con facile calcolo si trova la relazione

$$(5) \qquad \chi_k = \frac{r}{4} \left\{ \frac{2n-2k-1}{n-k} \omega_{k+1} - \frac{r}{4(n-k)(n-k-1)} \omega_{k+2} \right\}$$

e presenta la particolarità di non contenere m in modo esplicito, e per-
tte di ricavare le successive funzioni χ_k e quindi — col metodo esposto
lanzi — le successive ω_k.

Una volta calcolata $u_{n-1}(\rho, Q)$, si passa — con lo stesso metodo — al
lcolo di $u_{n-2}(\rho, Q)$, soluzione della equazione

$$\Delta^{n-2}[\rho^{2n-4}u_{n-2}(\rho, Q)] = \Delta^{n-2}[u(\rho, P) - \rho^{2n-2}u_{n-1}(\rho, P)]$$

così via.

Nel caso in cui $r = 0$ e nell'ipotesi sopra ricordata si ha:

$$u_{n-1}(\rho, Q) = \frac{\rho^{1-n-\frac{m}{2}}}{4^{n-1}(n-1)!}\int_0^\rho \Delta^{n-1}u(\rho, Q)\rho^{\frac{m}{2}}d\rho^{n-1},$$

$$u_{n-2}(\rho, Q) = \frac{\rho^{2-n-\frac{m}{2}}}{4^{n-2}(n-2)!}\int_0^\rho \Delta^{n-2}[u(\rho, Q) - \rho^{2n-2}u_{n-1}(\rho, Q)]\rho^{\frac{m}{2}}d\rho^{n-2},$$

. . . . . .

$$u_0(\rho, Q) = u(\rho, Q) - \rho^2 u_1(\rho, Q) - \ldots - \rho^{2n-2}u_{n-1}(\rho, Q).$$

3. Considereremo infine due casi particolari: $m = 0$ e $m = 1$.

Nel primo caso l'equazione (2) diventa

$$\omega_k''(\theta) + (n-k)^2\,\omega_k(\theta) = \chi_k(\theta)$$

l'integrale generale ω_k viene espresso semplicemente da

$$\omega_k(\theta) = \frac{1}{n-k}\int_0^\theta \chi_k(t)\,\mathrm{sen}\,(n-k)(\theta-t)dt + c_{k,1}\cos(n-k)\theta + c_{k,2}\,\mathrm{sen}\,(n-k)\theta$$

$$(k = n-1, n-2, \ldots, 2, 1)$$

opo di che la relazione ricorrente (5) permette di trovare in modo ovvio
na relazione fra tre ω_k consecutive. In effetti si ha:

$$\omega_k = \frac{(2n-2k-1)\,r}{4(n-k)^2}\int_0^\theta \omega_{k+1}(t)\,\mathrm{sen}\,(n-k)\,(\theta-t)dt -$$

$$\frac{r^2}{6(n-k)^2(n-k-1)}\int_0^\theta \omega_{k+2}(t)\mathrm{sen}(n-k)(\theta-t)dt + c_{k,1}\cos(n-k)\theta + c_{k,2}\mathrm{sen}(n-k)\theta\,.$$

La formola che dà u_{n-1} è qui:

$$u_{n-1} = \rho^{1-n}\left[\omega_1 + \frac{\omega_2}{1!\,4(n-1)}(\rho - r_j + \ldots + \frac{\omega_{n-1}}{(n-2)!\,4^{n-2}(n-1)\ldots 2}(\rho - r)^{n-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4^{n-1}(n-1)!}\int_r^\rho \Delta^{n-1}u\, d\rho^{n-1}\right].$$

Questa insieme alle analoghe per $u_{n-2}, \ldots, u_1$ permette di concludere che la più generale decomposizione di una funzione n-iperarmonica in una somma del tipo (1) include $n(n-1)$ costanti arbitrarie [3]).

Quando $m = 1$ l'equazione che determina ω_k diviene

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\omega_k}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\omega_k}{\partial\varphi^2} + \left(n-k-\frac{1}{2}\right)\left(n-k+\frac{1}{2}\right)\omega_k = \chi_k$$

e le soluzioni della corrispondente equazione omogenea — che, secondo quanto si è visto innanzi, è necessario considerare — sono le cosidette funzioni *anulari o toroidali*, le quali altro non sono che funzioni sferiche il cui indice è la metà di un intero dispari. Nel caso in esame l'indice è

$$\mu = n - k - \frac{1}{2}.$$

È noto che tali funzioni si esprimono come combinazioni lineari a coefficienti costanti dei prodotti

$$\cos\nu\varphi \,.\, P_\nu^{n-k-\frac{1}{2}}(\cos\theta) \quad , \quad \operatorname{sen}\nu\varphi \,.\, P_\nu^{n-k-\frac{1}{2}}(\cos\theta)$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

dove [4])

$$P_\nu^{n-k-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^\nu\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-k-\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi \frac{\cos\nu z\, dz}{(x + \sqrt{x^2-1}\,\cos z)^{n-k+\frac{1}{2}}}.$$

---

[3]) Maggiori particolari si trovano nella comunicazione fatta al Congresso di Firenze, sopra ricordata.

[4]) Cfr. A. B. Basset, *Amer. J. math.* (1893), p. 287 e H. E. Heine, *Theorie der kugelfunctionen*, Berlino, 1878 (2.ª ed.), pag. 283 e seguenti.

Sulla rappresentazione conforme delle superficie non analitiche dotate di singolarità

ota del prof. **Gianfranco Cimmino,** *presentata dal socio corr.* **R. Caccioppoli**

(Adunanza del dì 1. maggio 1937 - XV)

Sunto. — Si studia la rappresentazione conforme di una superficie non analitica prossimità di uno spigolo o di un punto saliente, trovando in proposito gli stessi sultati che sussistono nel caso dell' analiticità.

Nello studio della rappresentazione conforme di un pezzo di superficie on analitica su un pezzo di piano, L. Lichtenstein è pervenuto all' impornte risultato che la rappresentazione conforme è possibile, se i coefficienti , F, G della prima forma differenziale sulla superficie, divisi per $\sqrt{EG-F^2}$, nno luogo a tre funzioni verificanti una condizione di Hölder; in questa otesi, cioè, è possibile trovare una soluzione ξ, η del sistema

$$\eta_u = \frac{F\xi_u - E\xi_v}{\sqrt{EG-F^2}}, \qquad \eta_v = \frac{G\xi_u - F\xi_v}{\sqrt{EG-F^2}},$$

sultando le $\xi(u,v)$, $\eta(u,v)$ dotate derivate parziali prime continue [1]).

Nella presente comunicazione si mostra come questo teorema di L. Lichenstein permetta di trattare la rappresentazione conforme di una supercie non necessariamente analitica dotata di singolarità, come per esempio no spigolo, o un punto saliente.

Ciò mi sembra abbia qualche interesse, perchè viene a colmare una acuna alla quale lo stesso L. Lichtenstein accenna [2]), osservando che evono verosimilmente sussistere, anche per le superficie non analitiche, i isultati che sono stati ottenuti a questo proposito nel caso delle superficie nalitiche, nonostante che, in quest' ultimo caso, le dimostrazioni siano esenzialmente basate sull' analiticità delle superficie.

1. Supponiamo, in primo luogo, che il pezzo di superficie considerato S presenti uno spigolo, il quale sia una curva C dotata in ogni punto di tangente variabile con continuità e decomponga S in due parti, che diremo S_1, S_2. Faremo inoltre l' ipotesi che su S si possa fissare un sistema Γ di

---

[1]) *Bulletin de l' Acad. de Sc. de Cracovie*, 1916, p. 192-217.

[2]) *Enc. der Mathematischen Wissenschaften*, Band II 3, Heft 3, (1919), p. 264-265.

curve con le seguenti proprietà: *a)* per ogni punto di S passi una, ed una sola, curva di Γ; *b)* ogni curva di Γ tagli perpendicolarmente lo spigolo C; *c)* le due parti in cui ogni curva di Γ è divisa dal punto d'intersezione con C siano curve dotate in ogni punto di tangente variabile con continuità.

Fissato un punto P_0 su C e detto P un qualsiasi punto di S, sia Q il punto in cui C è incontrata dalla curva di Γ uscente da P; l'arco QP, contato su quest'ultima curva a partire da Q, e l'arco P_0Q, contato sulla curva C a partire da P_0 si assumeranno come coordinate u, v del punto P su S.

Se rappresentiamo la superficie S rispetto ai parametri u e v, il relativo dominio base D nel piano uv conterrà nell'interno un segmento dell'asse v, sul quale viene a rappresentarsi lo spigolo, l'origine corrispondendo, in particolare, al punto P_0. Dei coefficienti E, F, G della prima forma differenziale il primo sarà sempre uguale all'unità, gli altri due tenderanno rispettivamente a zero e all'unità, quando il punto uv tende in D a un punto dell'asse v, sia per valori di u positivi, che per valori di u negativi.

Supposto dunque ancora che F e G verifichino una condizione di Hölder tanto per $u \geq 0$ che per $u \leq 0$, saremo nelle condizioni del teorema di L. Lichtenstein ricordato in principio.

La *conformità* della rappresentazione nei punti dello spigolo C deve essere intesa nel senso che due curve uscenti da un punto di C con tangenti determinate, e situate entrambe su S_1 o su S_2 si rappresenteranno su due curve uscenti da un punto dell'asse v con tangenti formanti il medesimo angolo; se invece le due curve sono situate una su S_1 e l'altra su S_2, l'angolo delle tangenti alle curve immagini sul piano uv sarà uguale alla somma degli angoli formati dalle due tangenti alle curve obbiettive su S con la tangente allo spigolo C nel medesimo punto.

2. Per mostrare un caso semplice in cui è possibile rendere soddisfatte tutte le condizioni enunciate nel n. precedente, supponiamo, per esempio, che S sia suscettibile di una rappresentazione del tipo $z = f(x, y)$, al variare di x, y in un dominio piano D; questo sia decomposto in due dominii D_1, D_2 dalla curva $y = \varphi(x)$, e la funzione f sia dotata di derivate parziali seconde hölderiane tanto in D_1 che in D_2, sia continua in tutto D, ma con derivate parziali prime discontinue attraverso alla curva $y = \varphi(x)$; inoltre anche $\varphi(x)$ sia dotata di derivate seconde hölderiane.

Lo spigolo C sarà dunque rappresentato da

$$y = \varphi(x), \qquad z = f(x, \varphi(x)).$$

Supponiamo che le direzioni normali a C su S_1 e su S_2, proiettate sul piano x, y, non diventino mai parallele a uno degli assi coordinati (ciò che può sempre ottenersi, riducendosi eventualmente a considerare una porzione di S), per esempio a y. Allora le proiezioni su xy delle curve del sistema Σ

potranno supporre rappresentate da equazioni del tipo $y = \psi(x, \xi)$, essendo ξ il parametro che individua la curva nel sistema.

Se con ξ indichiamo l'ascissa del punto comune alle due curve $y = \varphi(x)$ $y = \psi(x, \xi)$, sarà (chiamando p e q le derivate parziali prime di f)

$$u = \int_{\xi}^{x} \sqrt{1 + \psi_{\alpha}^{2}(\alpha, \xi) + [p(\alpha, \psi(\alpha, \xi)) + q(\alpha, \psi(\alpha, \xi))\psi_{\alpha}(\alpha, \xi)]^2}\, d\alpha,$$

$$v = \int_{x_0}^{\xi} \sqrt{1 + \varphi'^2(\alpha) + [p(\alpha, \varphi(\alpha)) + q(\alpha, \varphi(\alpha))\varphi'(\alpha)]^2}\, d\alpha.$$

Nelle suddette ipotesi, si potrà definire la $\psi(x, \xi)$, ponendo per esempio

$$\psi(x, \xi) = \varphi(\xi) - \int_{\xi}^{x} \frac{1 + p^2(\alpha, \varphi(\alpha)) + p(\alpha, \varphi(\alpha))\, q(\alpha, \varphi(\alpha))\, \varphi'(\alpha)}{p(\alpha, \varphi(\alpha))\, q(\alpha, \varphi(\alpha)) + [1 + q^2(\alpha, \varphi(\alpha))]\varphi'(\alpha)}\, d\alpha.$$

È con ciò subito verificato che $\psi(\xi, \xi) = \varphi(\xi)$; che la curva

$$y = \psi(x, \xi), \qquad z = f(x, \psi(x, \xi))$$

aglia perpendicolarmente la C; che infine ad ogni xy corrisponde un uico ξ, per cui sia $y = \psi(x, \xi)$, giacchè $\psi_{\xi}(x, \xi)$ è certo $\neq 0$.

D'altra parte, i coefficienti F e G, calcolati rispetto ai parametri u, v il coefficiente E, come si è detto, riesce $= 1$), sono espressi nelle coordinate x, y da

$$F = -\frac{u_x v_x + u_y v_y + (q u_x - p u_y)(q v_x - p v_y)}{(u_x v_y - u_y v_x)^2},$$

$$G = \frac{u_x^2 + u_y^2 + (q u_x - p u_y)^2}{(u_x v_y - u_y v_x)^2},$$

calcolando le derivate di u e v rispetto a x e y dalle formole (1), dove ξ deve considerarsi funzione di x, y, definita implicitamente da $y = \psi(x, \xi)$, si riconosce che esse sono hölderiane, in base alle ipotesi fatte.

3. Tornando ora alle considerazioni generali, supponiamo, in secondo luogo, che la superficie S abbia un solo punto singolare O, il quale si presenti come un punto saliente a cono tangente regolare. Più precisamente, supporremo che su S si possa fissare un sistema Σ di curve con le seguenti proprietà: *a)* per ogni punto di S diverso da O passi una, ed una sola, curva di Γ; *b)* ogni curva di Γ sia dotata in ogni punto di retta tangente variabile

con continuità ed esca da O; *c)* le tangenti in O alle curve di Γ costituiscano un cono avente per direttrice una curva dotata di tangente variabile con continuità.

Fissata sul cono tangente a S in O una generatrice g_0, per ogni punto P di S indichiamo con s la lunghezza dell'arco di curva Γ congiungente O con P, e con φ l'angolo formato dalla tangente t in O a quest'ultima curva con la generatrice fissa g_0, intendendo di contare quest'angolo non nello spazio, ma sulla superficie del cono. In altre parole, segando il cono tangente con la sfera di centro O e raggio unitario, φ sarà la lunghezza dell'arco della curva intersezione compreso fra il punto situato su g_0 e quello situato su t.

Preso il punto O come origine nello spazio x, y, z, siano

$$x = \alpha(s, \varphi), \qquad y = \beta(s, \varphi), \qquad z = \gamma(s, \varphi)$$

le equazioni esprimenti le coordinate dei punti di S in funzione dei parametri s, φ ora definiti. Sarà allora, identicamente in φ,

$$\alpha(0, \varphi) = \beta(0, \varphi) = \gamma(0, \varphi) = 0 \tag{2}$$

e identicamente in s, φ,

$$\alpha_s^2 + \beta_s^2 + \gamma_s^2 = 1. \tag{3}$$

La curva d'intersezione del cono tangente a S in O con la sfera di centro O e raggio unitario ha per equazioni parametriche

$$x = \alpha_s(0, \varphi), \qquad y = \beta_s(0, \varphi), \qquad z = \gamma_s(0, \varphi),$$

sicchè sarà pure, identicamente in φ,

$$\alpha^2{}_{s\varphi}(0, \varphi) + \beta^2{}_{s\varphi}(0, \varphi) + \gamma^2{}_{s\varphi}(0, \varphi) = 1. \tag{4}$$

Pertanto, posto

$$\overline{F} = \alpha_s\alpha_\varphi + \beta_s\beta_\varphi + \gamma_s\gamma_\varphi, \qquad \overline{G} = \alpha_\varphi^2 + \beta_\varphi^2 + \gamma_\varphi^2,$$

sussisteranno le relazioni di limite

$$\lim_{s \to 0} \frac{\overline{F}}{s} = 0, \qquad \lim_{s \to 0} \frac{\overline{G}}{s^2} = 1, \tag{5}$$

di cui la prima è conseguenza delle (2) e (3), la seconda discende dalla (4).

Ciò premesso, indichiamo con ω il rapporto fra 2π e la lunghezza della arva d'intersezione del cono tangente a S in O con la sfera di centro O raggio 1, O, ciò che è lo stesso, fra 2π e l'angolo al vertice del cono medeimo, supposto sviluppato nel piano. Indi assumiamo come parametri u e v uelli definiti da

$$u = s^{\varpi} \cos\omega\varphi\,, \qquad v = s^{\varpi} \operatorname{sen}\omega\varphi.$$

In tal modo, la superficie S viene ad essere rappresentata su un doinio D del piano uv, il punto O avendo per immagine l'origine nel piano uv, he è un punto interno a D.

Calcolando i coefficienti E, F, G rispetto ai parametri u e v, si trova he essi, divisi per la $\sqrt{EG-F^2}$, sono dati rispettivamente da

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{G}-\overline{F}^2}}\left(s\cos^2\omega\varphi - 2\overline{F}\cos\omega\varphi\operatorname{sen}\omega\varphi + \frac{1}{s}\overline{G}\operatorname{sen}^2\omega\varphi\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{G}-\overline{F}^2}}\left(s\cos\omega\varphi\operatorname{sen}\omega\varphi - \overline{F}(\cos^2\omega\varphi - \operatorname{sen}^2\omega\varphi) - \frac{1}{s}\overline{G}\cos\omega\varphi\operatorname{sen}\omega\varphi\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{G}-\overline{F}^2}}\left(s\operatorname{sen}^2\omega\varphi + 2\overline{F}\cos\omega\varphi\operatorname{sen}\omega\varphi + \frac{1}{s}\overline{G}\cos^2\omega\varphi\right).$$

Ma dalle (5) risulta l'esistenza del limite di queste tre espressioni per $s \to 0$, e precisamente si vede che, al limite, esse si riducono ordinatamente a 1, 0, 1.

Supposto pertanto che $\overline{F}$ e $\overline{G}$ risultino hölderiane, saremo nelle condizioni del teorema di L. Lichtenstein.

La conformità della rappresentazione nel punto singolare O va intesa nel senso che, prese su S due curve uscenti da O con tangenti determinate, l'angolo delle due curve immagini si ottiene da quello delle due curve obiettive, moltiplicandolo per il fattore costante ω.

4. Anche qui vogliamo indicare un caso particolare, in cui facilmente si possono rendere soddisfatte tutte le condizioni enunciate: supponiamo che, fissate nel piano xz delle coordinate polari ρ, θ, la superficie S si possa rappresentare mediante un'equazione del tipo $z = f(\rho, \theta)$, dove f sia dotata, in ogni punto diverso da $\rho = 0$, di derivate parziali seconde hölderiane.

Prendiamo poi come curve di Σ quelle le cui proiezioni sul piano xy sono rappresentate da $\theta = \psi(\rho, \tau)$, dove τ è il parametro che individua la curva in Σ; si può assumere, per esempio, per τ il valore iniziale dell'angolo θ sulle singole curve cioè supporre che sia $\tau = \psi(0, \tau)$.

I parametri s, φ sopra considerati saranno allora espressi da

$$s = \int_0^{\rho} \sqrt{1+f_\rho^2(\lambda,\psi(\lambda,\tau))+2\psi_\rho(\lambda,\tau) f_\rho(\lambda,\psi(\lambda,\tau)) f_\theta(\lambda,\psi(\lambda,\tau))+[\lambda^2+f_\theta^2(\lambda,\psi(\lambda,\tau))]\psi_\rho^2(\lambda,\tau)}\, d\lambda$$

(6)

$$\varphi = \int_0^{\tau} \frac{\sqrt{1+f_\rho^2(0,\sigma)+f_{\rho\theta}^2(0,\sigma)}}{1+f_\rho^2(0,\sigma)}\, d\sigma .$$

Quanto alla funzione $\psi(\rho,\tau)$, basterà prenderla in modo che le sue derivate parziali seconde siano hölderiane e che l'equazione $\theta = \psi(\rho,\tau)$ sia risolubile rispetto a τ nel campo che si considera (si potrebbe anche porre semplicemente $\psi(\rho,\tau) = \tau$).

I coefficienti $\overline{F}$ e $\overline{G}$ del n. precedente sono espressi nelle coordinate ρ, θ da

$$\overline{F} = -\frac{(\rho^2 s_\rho \varphi_\rho + s_\theta \varphi_\theta) + (f_\rho s_\theta - f_\theta s_\rho)(f_\rho \varphi_\theta - f_\theta \varphi_\rho)}{(s_\rho \varphi_\theta - s_\theta \varphi_\rho)^2},$$

$$\overline{G} = \frac{\rho^2 s_\rho^2 + s_\theta^2 + (f_\rho s_\theta - f_\theta s_\rho)^2}{(s_\rho \varphi_\theta - s_\theta \varphi_\rho)^2},$$

dove le derivate di s e φ rispetto a ρ e θ si calcolano dalle formole (6), nelle quali τ deve considerarsi funzione di ρ e θ, definita implicitamente da $\theta = \psi(\rho,\tau)$. Per le ipotesi fatte, si riconosce dunque che $\overline{F}$ e $\overline{G}$ verificheranno anch'essi una condizione di Hölder.

Le trasformazioni di Tschirnausen ed i polinomi definiti

Nota del prof. **Guido Barba**, *presentata dal socio corr.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 1. maggio 1937 - XV)

Sunto. — L' A. si richiama a risultati precedenti ed enuncia una nuova condizione perchè un polinomio sia definito.

1. In una Nota pubblicata in questi « Rendiconti » [1]), facendo seguito ad altre tre lincee [2]) sui « Polinomi definiti », abbiamo dato alcuni criteri per la costruzione di polinomi definiti.

Nella presente Nota, accennato ad un altro processo del tipo, *presentate* alcune considerazioni fondamentali intorno al problema dei polinomi definiti, riattaccandoci alle trasformazioni già trattate nelle citate Note lincee, esaminiamo una importante trasformazione non lineare, quella di Tschirnausen, in rapporto al problema che ci occupa.

2. È noto [3]) che una equazione che presenti tre coefficienti consecutivi in progressione geometrica, ammette radici immaginarie. Ne segue, quindi, detti h_i delle costanti, con i da 0 ad $\frac{n}{2} = m$, che è definito il polinomio:

$$Q(x) = x^{2m} + h_{m-1}\, x^{2m-1} + (h^2_{m-1} + 1)\, x^{2(m-1)} + \ldots + h_0^2.$$

Pertanto, detti $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots, p_0$ i coefficienti di $Q(x)$, con $p_n = 1$, un polinomio definito si può costruire assegnando ad arbitrio i coefficienti delle potenze dispari e determinando quelli delle potenze pari, attraverso la relazione:

$$p_{2k} = p^2_{2k-1} + 1$$

si ne deduce un nuovo criterio per riconoscere se un dato polinomio è definito.

Naturalmente, ove il polinomio non sia completo nelle potenze pari, o

---

[1]) *Criteri per la costruzione di polinomi definiti.* Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli, s. 4.ª, vol. VII, 1937.

[2]) V. richiami in Nota citata.

[3]) V. Cesaro, *Algebra.*

presenti qualcuna di queste con coefficiente negativo, il criterio è inapplicabile.

3. È qui opportuno rammentare che condizioni necessarie e sufficienti per riconoscere se un dato polinomio è definito, vengono fornite, con semplici adattamenti, da ben noti risultati, riportati in classici trattati (v. CESARO, TRUDI). Prima di enunciare tali risultati una (per quanto ovvia) osservazione è, però, opportuna.

Dal punto di vista che ci occupa, le radici con ordine di multeplicità pari non influiscono sul carattere del polinomio. Determinati, quindi, con i ben noti metodi razionali, i polinomi $g_i(x)$, aventi come zeri semplici tutti e soli rispettivamente ed ordinatamente quelli semplici, doppi ecc. del polinomio di partenza, considereremo, soltanto, quelli corrispondenti a radici d'ordine di multeplicità dispari. Ognuno di essi, singolarmente, si impone all'esame, nella determinazione del carattere del polinomio dato. Sicchè, sempre, in seguito, salvo avviso in contrario, con le parole « polinomio $f(x)$ spogliato delle radici multiple », intenderemo un polinomio assoggettato al predetto trattamento. Il procedimento, in sostanza, consiste:

I) nello spezzamento di $f(x)$, nei polinomi $g_i(x)$

II) nella considerazione delle sole g *dispari*,

indi, se per *tutti* i polinomi di cui in II), sono soddisfatte le condizioni volute [radici complesse coniugate], allora e solo allora, il polinomio $f(x)$ sarà definito.

A) Condizione necessaria e sufficiente affinchè un polinomio di grado n (pari), spogliato di radici multiple, sia definito è che la successione σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$ presenti $\frac{n}{2}$ variazioni, ove si intenda:

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{i-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{i-1} & \cdots & & s_{2i-2} \end{vmatrix}$$

B) considerata la forma:

$$\varphi = (s_0 \quad x_1 + \ldots + s_{n-1} x_n) x_1 + \cdots + (s_{n-1} x_1 + \ldots + s_{2n-2} x_n) x_n$$

e ridotta a forma canonica (nelle ipotesi fatte, il discriminante è diverso da zero), la presenza di $\frac{n}{2}$ quadrati negativi assicura al polinomio il suo carattere definito.

C) Sia $f(x)$ un polinomio dai coefficienti $(a_0, a_1 \ldots a_n)$ e siano $b_0, b_1, \ldots$ oefficienti del polinomio $f'(x)$.

Siano r le radici distinte di $f(x)$. Il numero delle radici reali comprese due limiti qualunque è assegnato dalla successione $A_0, A_1, A_2, \ldots$ con:

$$A_0 = 1, \; A_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & b_0 & 1 \\ b_0 & b_1 & x \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & 1 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & x \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & x^2 \end{vmatrix}, \ldots$$

Ne seguono, ovviamente, la condizione per riconoscere il carattere di polinomio.

4. In una citata Nota lincea, abbiamo trattato delle trasformazioni e mutano polinomi definiti in polinomi definiti: le trasformazioni, però, uno tutte lineari. Vogliamo, qui, trattare delle trasformazioni non lineari, quelle, cioè, di TSCHIRNAUSEN, che denoteremo, brevemente, con il simbolo (T).

a) Dette μ_i le radici di $P(x)$, formiamoci il polinomio $Q(x)$ le cui radici ν_r siano date da:

$$\nu_r = \varphi(\mu_r) \tag{1}$$

n φ polinomio di grado, al più, $n-1$ e scriviamo:

$$Q = (T_\varphi) P.$$

Com'è noto, i coefficienti di q, di Q sono funzioni razionali intere dei efficienti a_i di $P(x)$ e t_i di φ.

È chiaro che, a radici reali di P la (1) faccia corrispondere radici reali Q [sempre, com'è sottinteso, i coefficienti di P, Q e qui, anche φ, siano ali], ed a radici immaginarie, radici immaginarie. E poichè Q è ancora grado n come P, possiamo intanto affermare che *(T) porta da polinomi finiti a polinomi definiti* (in senso stretto).

Ma, sempre attraverso (1) è chiaro che a radici multiple di P corrispondono radici multiple di Q, con lo stesso grado di multeplicità, onde possiamo, senz'altro, liberarci della restrizione annotata, più su, in parentesi.

b) com'è chiaro, le radici comuni alle due equazioni:

$$\begin{cases} P(x) = 0 \\ \varphi(x) - \nu_r = 0 \end{cases} \tag{2}$$

sono esclusivamente quelle tra le μ_r che soddisfano la seconda delle (2): tanto, cioè, quant'è l'ordine di multeplicità delle radici della trasformata e che si ottengono dal M. C. D. delle due funzioni in (2). Ora, non si può « a priori » affermare che ad una radice reale (complessa) della trasformata, corrisponda una radice reale (complessa) di $P(x)$, cosa, invece, che accadrà di sicuro, se la radice ν_r della trasformata è *semplice*.

Si può, quindi, affermare che se la $P(x) = 0$ ha radici semplici e si costruisce una trasformata a radici semplici, a radici reali (complesse) della trasformata, corrispondono radici reali (complesse) della equazione di partenza.

Consegue un nuovo criterio per riconoscere se un polinomio spogliato di radici multiple è definito. Si costruisca il trasformato a radici distinte: se tale polinomio è definito, lo sarà, anche il dato.

Il sentimento della natura in Leopardi

Nota del socio ordinario **Giuseppe De Lorenzo**

(pervenuta all' Accademia il dì 14 giugno 1937 - XV)

Sunto. — In questa nota l'A. dimostra, che, contrariamente ai concetti espressi da molti critici e commentatori, in Leopardi era vivissimo il sentimento della natura: come è provato dalle molte sue osservazioni e descrizioni, riguardanti fenomeni e forme degli astri, del cielo, dell'aria, della terra, dell'acqua, delle piante e degli animali, da lui cantati con somma esattezza scientifica, sublimata dall'afflato della poesia.

Nella numerosa letteratura, che durante un secolo è cresciuta e cresce sempre più sul nome e l'opera di Giacomo Leopardi, sia concesso anche a me, non letterato, ma naturalista, intervenire in una questione molto dibattuta tra i letterati ed i critici d'Italia; molti dei quali hanno voluto negare l'esistenza del sentimento della natura a Leopardi, facendo di lui un poeta prevalentemente od esclusivamente di pensiero e giudicandolo quindi alcuni, a tale stregua, neanche un vero poeta. Allo stesso modo gli stessi o simili critici hanno negato il senso e l'amore della natura agli antichi romani, considerandoli aridi uomini di semplice pratica azione. È toccato ad un geologo inglese, anzi scozzese, sir Archibald Geikie, nel suo bel libro *The love of Nature among the Romans*, London, John Murray, 1912, poter dimostrare come fosse vivo e sentito e potentemente espresso l'amore della natura tra gli antichi romani. Sia quindi dato oggi anche a me, parimenti geologo, il tentare la stessa dimostrazione per Leopardi, in questo dì centenario della morte del Poeta.

Il negare a Leopardi ed agli antichi romani il senso della natura dipende, secondo me, dalla tendenza romantica, di voler vedere rappresentata la natura con descrizioni lunghe, fantastiche, molto aggettivate, vaporose fino a divenire irreali; mentre Leopardi ed i romani hanno sempre espresso classicamente, come si dice, ossia lapidariamente, sobriamente, incisivamente, e con tanta più efficacia, quindi, per chi bene intende, i motivi umani, reali e naturali, che hanno formato oggetto della loro contemplazione e della loro rappresentazione.

Per dimostrare tale differenza, prima di addentrarsi nell'esame delle descrizioni naturali di Leopardi, basta accennare al modo come è stata rappresentata la notte lunare dai poeti delle due diverse tendenze. La luna ed il chiaro di luna sulla terra hanno sempre, in tutti i tempi ed in tutti i luoghi, commosso e spinto al canto lo spirito umano: e non solo lo spirito

umano, ma anche quello degli animali, dal lupo e dalle sue discendenze canine fino all'usignuolo. Ma, nell'evocazione del sublime spettacolo alcuni, specialmente i cantori settentrionali, ad inspirazione romantica, hanno transfuso l'onda dei loro affetti e dei loro sentimenti; mentre altri, prevalentemente meridionali, ne hanno dato una pura rappresentazione obiettiva, lasciando che questa agisse da sè sulla mente degli ascoltatori. In questa antitesi non nomino SHAKESPEARE, che non è classico nè romantico, o è l'uno e l'altro, e sta per sè e fa vedere la luna e la notte lunare attraverso le varie manifestazioni delle sue creature. Indico invece GOETHE, il più grande ed il più classico dei poeti germanici, che pur neanch'egli sfugge alla tendenza romantica e nelle sue molte e stupende poesie alla luna o sulla luna ce la mostra sempre tra i vapori della sua gioia od attraverso il velo della sua mestizia o nella serenità dei momenti di pace del suo animo. Se ora da lui e dai suoi minori fratelli delle zone brumose della terra ci volgiamo ai cantori delle zone solari, troviamo subito la luna cantata con altro tono.

E cominciamo da quel signor dell'altissimo canto, che sopra gli altri com'aquila vola. Nei versi 555-559 del canto ottavo dell'*Iliade* OMERO dà la sua meravigliosa rappresentazione della notte lunare, ripetuta poi, immediatamente o mediatamente, da altri poeti posteriori:

> Come quando in cielo le stelle intorno alla luna fulgente
> splendono scintillanti, quando d'ogni dove l'aria è senza vento;
> ed appaiono tutte le balze e le alture eminenti
> e le forre: chè pel cielo si spande l'etere immenso,
> e tutti si vedono gli astri.

Qui tutto è obiettivo e senza *pathos*, come s'addice alla sovranità della Natura, esteriormente impassibile sugli interni contorcimenti dell'animo umano.

Non meno obiettiva e serena è la famosa terzina del canto XXIII del *Paradiso:*

> Quale nei plenilunii sereni
> Trivia ride tra le ninfe eterne,
> Che dipingono il ciel per tutti i seni;

se anche in essa il nostro signor dell'altissimo canto d'Italia faccia traluce re il riso della luna e delle stelle attraverso il velo delle reminiscenze mitologiche di Trivia e delle ninfe eterne.

Ma nessun velo offusca lo splendore della notte lunare cantata da ORAZIO nel suo XV *epodo:*

> Nox erat, et coelo fulgebat luna sereno
> inter minora sidera.

Se anche Orazio aveva innanzi alla mente il ricordo di esemplari greci, il genio suo, però, e quello della concisa, perfetta lingua latina gli hanno concesso di dare la forma più breve, più lucida e tersa, aristocraticissima ed al tempo stesso popolarissima, semplicissima, quasi elementare e pur nobilmente lapidaria, alla rappresentazione dell'incantesimo della notte lunare.

Ed eccoci ora, per non prolungare più oltre i paragoni, a Leopardi, ai primi versi del suo canto, del 1820, de *La sera del dì di festa*:

Dolce e chiara è la notte e senza vento,
E queta sovra i tetti e in mezzo agli orti
Posa la luna, e di lontan rivela
Serena ogni montagna.

In questi versi non c'è la letteratura mitologica di quelli di Dante. C'è, evidente, il ricordo di Omero, però senza tautologie; e c'è la semplicità e la cadenza della lapide di Orazio: ma raffinata e resa più intima dalla visione dei tetti e degli orti illuminati dalla luna; che subito però si solleva dall'umiltà delle case del villaggio e di lontan rivela serena ogni montagna. Non si può, con più serena obiettività, dare più forte e più alta spinta al volo dello spirito umano. Per l'ampiezza della visione e per la profondità del sentimento questi versi di Leopardi mi ricordano il paragone indiano, del santo, che passa luminoso ed immacolato attraverso la vita ed il mondo, come la luna piena per le vie del villaggio.

Tale è dunque l'arte di Leopardi, nel sentire e nell'esprimere la natura, che può reggere vittoriosamente il confronto con quello dei più grandi cantori, quali Omero, Dante ed Orazio. E tale arte è costantemente a sè pari, sia che descriva umili aspetti della vita domestica o che s'innalzi con volo d'aquila verso i cieli stellari o si perda nell'immensità dell'infinito. Simile crescendo si trova tutto racchiuso nei primi versi de *La vita solitaria*, del 1820:

La mattutina pioggia, allor che l'ale
Battendo esulta nella chiusa stanza
La gallinella, ed al balcon s'affaccia
L'abitator de' campi, e il Sol che nasce
I suoi tremuli rai fra le cadenti
Stille saetta, alla capanna mia
Dolcemente picchiando, mi risveglia;
E sorgo, e i lievi nugoletti, e il primo
Degli augelli susurro, e l'aura fresca,
E le ridenti piagge benedico:
. . . . . .

Talor m' assido in solitaria parte,
Sovra un rialto, al margine d' un lago
Di taciturne piante incoronato.
Ivi, quando il meriggio in ciel si volve,
La sua tranquilla imago il Sol dipinge,
Ed erba o foglia non si crolla al vento
E non onda increspársi, e non cicala
Strider, nè batter penna augello in ramo,
Nè farfalla ronzar, nè voce o moto
Da presso nè da lungi odi nè vedi.
Tien quelle rive altissima quiete ;
Ond' io quasi me stesso e il mondo oblio
Sedendo immoto, e già mi par che sciolte
Giaccian le membra mie, nè spirto o senso
Più le commova, e lor quiete antica
Co' silenzi del loco si confonda.

Qui c'è da rimanere stupefatti, nel vedere con quanta semplicità, ed al tempo stesso con quale grandiosità, partendo dall'umile batter dell'ali della gallinella nella stanza, uscendo all' aperto sotto le stille di pioggia, ai primi raggi del sole, ci si innalzi a poco a poco fra i nugoli del cielo, per rientrare poi in sè stesso nel grande silenzio panico dell'ora meridiana estiva, in cui il microcosmo si confonde col macrocosmo e l'essere individuale, immergendosi in una quiete di nirvana, si dissolve nel gran tutto.

Da tale descrizione di quiete e di pace della natura si può passare a spettacoli di tempesta, come nei versi della canzone *Nelle nozze della sorella Paolina*, del 1821 :

quando a tenzone
Scendono i venti, e quando nembi aduna
L' olimpo, e fiede le montagne il rombo
Della procella ;

od in quelli dell' *Ultimo canto di Saffo*, pur del 1821 :

Quando per l' etra liquido si volve
E per li campi trepidanti il flutto
Polveroso de' Noti, e quando il carro,
Grave carro di Giove a noi sul capo,
Tonando, il tenebroso aere divide ;

e trovare sempre lo stesso sommo magistero d'arte, quale espressione impareggiabile di un sentimento della natura vivissimo e profondo.

Sentimento della natura in tempesta, che si trova anche espresso più di ne *Le ricordanze*, del 1829, descrivendo la sua vita nel palazzo paterno,

In queste sale antiche,
Al chiaror delle nevi, intorno a queste
Ampie finestre sibilando il vento;

più ancora nelle strofe 24 e segg. del canto sesto dei *Paralipomeni della Batracomiomachia*, posteriori al 1831:

Un temporal sopra il suo capo accolto
Oscurò delle stelle ogni barlume;
Gelato un nembo in turbine convolto
Colmó le piagge d'arenose spume,
Ed ai campi adeguò così la via,
Che seguirla impossibil divenia.
Il vento con furor precipitando
Schiantava i rami e gli arbori svellea,
E tratto tratto il fulmine piombando
Vicine rupi e querce scoscendea
Con altissimo suon, cui rimbombando
Ogni giogo, ogni valle rispondea,
E con tale un fulgor, che tutto il loco
Parea subitamente empier di foco.

Questa descrizione, tratteggiata con mano maestra e così evidente, sia pel magistero dell'arte che per la precisione scientifica, ricorda l'altra, già composta dal poeta diciottenne, nella cantica dell'*Appressamento della morte*, del 1816, e poi da lui ritoccata a Napoli dopo il 1831:

Spento il diurno raggio in occidente,
E queto il fumo delle ville, e queta
De' cani era la voce e della gente..
Spandea il suo chiaror per ogni banda
La sorella del sole, e fea d'argento
Gli arbor ch'a quel loco eran ghirlanda.
I ramoscelli ivan cantando al vento,
E in un con l'usignuol che sempre piagne
Fra i tronchi un rivo fea dolce lamento.
Limpido il mar da lungi, e le campagne
E le foreste, e tutte ad una ad una
Le cime si scoprian delle montagne.
In queta ombra giacea la valle bruna,

E i collicelli intorno rivestia
Del suo candor la rugiadosa luna...
Ecco turbar la notte, e farsi oscura
La sembianza del ciel, ch' era sì bello
. . . . . .
Un nugol torbo, padre di procella,
Sorgea di dietro ai monti, e crescea tanto,
che più non si scoprìa luna nè stella...
Veniva il poco lume ognor più fioco;
E intanto al bosco si destava il vento,
. . . . . .
E si fea più gagliardo ogni momento,
Tal che a forza era desto e svolazzava
Tra le fronde ogni augel per lo spavento.
E la nube, crescendo, in giù calava
Ver la marina sì, che l' un suo lembo
Toccava i monti, e l' altro il mar toccava.
Già tutto a cieca oscuritade in grembo,
S' incominciava udir fremer la pioggia,
E il suon cresceva all' appressar del nembo.
Dentro le nubi in paurosa foggia
Guizzavan lampi . . . . . .

Qui il temporale, che non si potrebbe meglio sentire ed esprimere, è preceduto, come spesso avviene, dalla quiete dell' aria nella serena notte lunare, sempre sì cara a LEOPARDI, come gli è cara la primavera.

La primavera infatti, sia quella dell' anno che l'altra dell'età umana, giovinezza primavera di bellezza, trova sempre in LEOPARDI gli accenti più commossi di un sentimento di letizia e di esultanza, quale scaturisce da un animo, che vibra in perfetto accordo col rinnovellarsi della natura primaverile. Basti ricordare i ben noti versi *A Silvia*, del 1828:

Era il maggio odoroso...
Io gli studi leggiadri
Talor lasciando e le sudate carte,
Ove il tempo mio primo
E di me si spendea la miglior parte,
D' in su i veroni del paterno ostello
. . . . . .
Mirava il ciel sereno,
Le vie dorate e gli orti,
E quinci il mar da lungi, e quindi il monte.
Lingua mortal non dice
Quel ch' io sentivo in seno.

. più ancora tale sentimento della natura primaverile si trova possente-
nte, per quanto concisamente, espresso nei pochi versi del *Passero soli-
rio*, del 1829:

Primavera dintorno
Brilla nell' aria, e per li campi esulta,
Sì ch' a mirarla intenerisce il core.
Odi greggi belar, muggire armenti,
Gli altri augelli contenti, a gara insieme
Per lo libero ciel fan mille giri,
Pur festeggiando il lor tempo migliore...

er trovare un confronto a questi versi, bisogna ricorrere a quelli dello
upendo inno alla primavera, cantato da Lucrezio al principio del suo
ema *De rerum Natura*:

Nam simul ac species patefacta est verna diei
et reserata viget genetabilis aura favoni,
aëriae primum volucres te, diva, tuumque
significant initum perculsae corda tua vi;
indae ferae pecudes persultant pabula laeta
et rapidos tranant amnes . . . . . .

'incantesimo della primavera è tale, da far sgorgare note simili a queste di
UCREZIO e di Leopardi anche nel cuore del mondo romantico, nel canto
usicale alla primavera, nel primo atto della *Walkirie* di Wagner:

Le tempeste invernali cedono
alla luna dell' amore, —
in mite luce
luce la primavera; —
su tepide aure,
molli e soavi,
miracol tessendo,
ella si culla;
per selve e per prati
spira il suo fiato:
del canto di augelli beato
dolce risuona,
esala soavi profumi...

a simiglianza serve a far scorgere anche più netta la differenza tra il
anto vaporoso, etereo, e pur sublime, di Wagner ed i versi non meno su-
limi, ma incisi come su lapide marmorea, di Lucrezio e di Leopardi.

Il tema della primavera è poi ripreso da LEOPARDI e sviluppato co maggiore ampiezza nelle ottave del secondo canto dei *Paralipomeni dell Batracomiomachia*; in cui dal lieve adagio dell'abbaiare notturno dei can e del canto mattutino dei galli si sale a grado a grado fino all' andant maestoso dell' aurora e del sorgere del sole:

Più che mezze oramai l' ore notturne
Eran passate, e il corso all' oceano
Inchinavan pudiche e taciturne
Le stelle, ardendo in sul deserto piano.
Deserto al topo in ver, ma le diurne
Cure sopian da presso e da lontano
Per boschi, per cespugli ed arboscelli
Molte fere terrestri e molti uccelli.

E biancheggiar tra il verde all' aria bruna,
Or ne' campi remoti, or su la via,
Or sovra colli qua e là più d' una
Casa d' agricoltor si discopria;
E di cani un latrar da ciascheduna
Per li silenzi ad ora ad or s' udia,
E rovistar negli orti; e nelle stalle
Sonar legami e scalpitar cavalle.

Era maggio, che amor con vita infonde,
E il cuculo cantar s' udia lontano,
Misterioso augel, che per profonde
Selve sospira in suon presso che umano,
E qual notturno spirto erra e confonde
Il pastor che inseguirlo anela invano,
Nè dura il cantar suo, che in primavera
Nasce e il trova l' ardor venuto a sera.

Ma già dietro boschetti e collicelli
Antica e stanca in ciel salia la luna,
E su gli erbosi dorsi e i ramoscelli
Spargea luce manchevole e digiuna,
Nè manifeste l' ombre a questi e quelli
Dava, nè ben distinte ad una ad una;
Le stelle nondimen tutte copria,
E desiata al peregrin venia.

Tutti desti cantando erano i galli
Per le campagne, e gli augelletti ancora
Ricominciando insiem gli usati balli
Su per li prati al mormorar dell' ora,
E porporina i sempiterni calli

Apparecchiava al dì la fresca aurora,
Nè potea molto star che all' orizzonte
Levasse il re degli anni alta la fronte.

Non so s'io m'inganno, ma a me pare, che in nessun'altra poesia, antica o moderna, vicina o lontana, esista una descrizione delle ore notturne e mattutine, che possa mettersi a pari di questa, così semplice e pur così completa e perfetta; nella quale con sì profondo sentimento della natura è mirabilmente espresso tutto ciò, che si può udire e vedere sulla terra addormentata e ridesta; dai suoni degli animali domestici e selvaggi salendo su fino alla luce delle stelle, della luna e del sole. Esistono, sì, parziali visioni di tale spettacolo: come le aurore vediche ed omeriche, i vesperi di VIRGILIO, di DANTE e di PETRARCA, i mattutini di SHAKESPEARE, in *Romeo e Giulietta*, in *Venere ed Adone*, etc.; ma LEOPARDI assomma ed esprime il tutto, con semplicità e profondità senza pari.

Negli stessi *Paralipomeni della Batracomiomachia*, e propriamente nella strofa 12 del primo canto, il vespero è rappresentato con una lucidezza ed una serenità, eguale quasi a quella della stessa natura, senza ombra di *pathos*, senza alcun velo di mestizia:

Già la stella di Venere apparia
Dinanzi all' altre stelle ed alla luna:
Tacea tutta la piaggia e non s' udia
Se non il mormorar d' una laguna,
E la zanzara stridula, ch' uscia
Di mezzo la foresta all' aria bruna:
D' espero dolce la serena imago
Vezzosamente rilucea nel lago.

Si paragoni quest'ottava col canto di WOLFRAM alla stella di Venere, nel terzo atto del *Tannhäuser* di WAGNER, e si vedrà subito la differenza tra il modo classico ed il modo romantico, nel sentire e nell'esprimere il medesimo spettacolo naturale. Anche quando il suono della squilla vespertina del *Sabato del villaggio* potrebbe indurre al raccoglimento dell' avemaria ed a pensieri di malinconia, LEOPARDI resta lucido e sereno, come la luna senza veli, nel nitore dei versi:

Già tutta l' aria imbruna,
Torna azzurro il sereno, e tornan l' ombre
Giù da' colli e da' tetti,
Al biancheggiar della recente luna.

È la stessa lucida serenità, che si trova anche ne *Le ricordanze*, del 1829, in cui il dolore dell' uomo non vela la rappresentazione, che il poeta dà, della

notte stellare, stesa all'infinito sul canto della rana, sullo scintillìo delle lucciole, gli odori portati dal vento ed il suono della consueta vita umana:

Vaghe stelle dell' Orsa, io non credea
Tornare ancor per uso a contemplarvi
Sul paterno giardino scintillanti.....
Quante immagini un tempo, e quante fole
Creommi nel pensier l' aspetto vostro
E delle luci a voi compagne! allora
Che, tacito, seduto in verde zolla,
Delle sere io solea passar gran parte
Mirando il cielo, ed ascoltando il canto
Della rana rimota alla campagna!
E la lucciola errava appo le siepi
E in su l'aiuole, susurrando al vento
I viali odorati, ed i cipressi
Là nella selva; e sotto il patrio tetto
Sonavan voci alterne, e le tranquille
Opre de' servi. E che pensieri immensi,
Che dolci sogni mi spirò la vista
Di quel lontano mar, quei monti azzurri,
Che di qua scopro, e che varcare un giorno
Io mi pensava, arcani mondi, arcana
Felicità fingendo al viver mio.

I pensieri immensi, i dolci sogni, che il poeta qui con tanta nostalgia ricorda, sono quelli, a cui egli già dieci anni prima, nel 1819, aveva dato vita con la splendente gemma dell'idillio *L'infinito*, dove in quindici versi aveva racchiuso tutto il sentimento dell' infinito e dell' eternità dell' universo e dell' animo umano.

Nello stesso anno 1819 aveva composto l'altro idillio *Alla luna*, in cui il volto della sua diletta luna gli appare, per la prima ed unica volta, tremulo attraverso il suo pianto:

O graziosa luna, io mi rammento
Che, or volge l' anno, sovra questo colle
Io venia pien d' angoscia a rimirarti:
E tu pendevi allor su quella selva
Siccome or fai, che tutta la rischiari.
Ma nebuloso e tremulo dal pianto
Che mi sorgea sul ciglio, alle mie luci
Il tuo volto apparia, che travagliosa
Era mia vita: ed è, nè cangia stile,
O mia diletta luna.

ire anche qui Leopardi mantiene nettamente, classicamente distinto il suo dore ed il suo pianto dal volto sereno ed impassibile della graziosa luna. ò si intende anche meglio, se si paragona questa poesia, composta da eopardi a vent'anni, con quella *An Luna*, composta da Goethe nel 1769, iando anch'egli aveva precisamente vent'anni; nella quale invece il sen- imento del poeta, pur così classico nel suo mondo romantico, è interamente ansfuso nella luna: « Sorella della prima luce, immagine della tenerezza ella tristezza! La nebbia ondeggia con brivido argenteo intorno al tuo volto razioso:

Schwester von dem ersten Licht,
Bild der Zärtlichkeit in Trauer!
Nebel schwimmt mit Silberschauer
Um dein reizendes Gesicht. »

nche nell'altra, posteriore, poesia di Goethe *An den Mond* « Füllest wieder Busch und Tal-Still mit Nebelglanz, — Lösest endlich auch einmal — Meine Seele ganz » il chiaro di luna è intimamente impregnato ed imbevuto dello pasimo dell'anima del poeta.

Ma tale spasimo in Leopardi, anche quando raggiunge un'altezza tragica, ome nel *Bruto minore*, resta sempre distinto dal placido candore della luna, ontemplato dal puro occhio del mondo, qual'è quello dell'artista:

E tu dal mar cui nostro sangue irriga,
Candida luna, sorgi,
E l'inquieta notte e la funesta
All'ausonio valor campagna esplori.
Cognati petti il vincitor calpesta,
Fremono i poggi, dalle somme vette
Roma antica ruina;
Tu sì placida sei? Tu la nascente
Lavinia prole, e gli anni
Lieti vedesti, e i memorandi allori;
E tu su l'alpe l'immutato raggio
Tacita verserai, quando ne' danni
Del servo italo nome,
Sotto barbaro piede
Rintronerà quella solinga sede.

Questi versi, composti da Leopardi nei duri anni del servaggio d'Italia, poco prima del 1821, richiamano stranamente, più che i versi di Goethe, quelli cantati quasi contemporaneamente da Byron; che nella 4.ª scena del III atto del *Manfred*, contemplando la luna splendente sulle Alpi, ricorda quella,

da cui aveva visto rischiarate le ruine del Palatino e del Colosseo: « Le stelle sono apparse, la luna è sulle cime dei monti splendenti di neve. In una simile notte io stetti tra le mura del Colosseo, in mezzo alle grandi reliquie di Roma onnipossente... e tu splendevi, tu luna rotante, su tutto ciò, e spandevi un' ampia e tenera luce, che mitigava la grave austerità dell' aspra desolazione e colmava le brecce dei secoli, lasciando bello quel che ancora è tale e rinnovando quel che non è più, finchè il luogo divenne religione, ed il cuore traboccò di silente adorazione per quei grandi dell'antichità, i morti, ma scettrati sovrani, che ancora dominano i nostri spiriti dalle loro urne ». Come si vede, qui Leopardi e Byron s'incontrano, non solo nell' adorazione degli antichi romani, ma anche nel tenere romanamente distinta la perenne luce della luna dal mutevole corso delle umane vicende.

E non pure le successioni storiche degli avvenimenti umani, ma anche le mutazioni geologiche della superficie della terra sono per Leopardi illuminate, con meno transitoria vicenda, dal candido splendore della luna e da quello folgorante del sole. Già nel 1822, nell' *Inno ai patriarchi o dei principii del genere umano*, aveva cantato il più prossimo passato della terra,

Quando le rupi e le deserte valli
Precipite l' alpina onda feria
D' inudito fragor; quando gli ameni
Futuri seggi di lodate genti
E di cittadi romorose, ignota
Pace regnava; e gl' inarati colli
Solo e muto ascendea l' aprico raggio
Di febo e l' aurea luna.

Riprese più tardi lo stesso tema e lo svolse più ampiamente nel settimo canto dei *Paralipomeni*, descrivendo le mutazioni della superficie della terra, dal Mediterraneo fino al Gange, all' Indo alla Cina, e tratteggiando un magnifico quadro geologico dell' Italia durante l' epoca quaternaria:

Poco Italia a quel tempo era abitata,
Italia ch' al finir dell' ammiranda
Antichità per anni ultima viene,
E primi per virtù gli onori ottiene.
Sparsa era tutta di vulcani ardenti,
E incenerita in questo lato e in quello;
Fumavan gli Appennini allor frequenti
Come or fuman Vesuvio e Mongibello,
E di liquide pietre ignei torrenti
Al mar tosco ed all' Adria eran flagello;
Fumavan l' Alpi e la nevosa schiena
Solcavan fiamme ed infocate arene.

nche qui il rigore scientifico si accoppia con l'evidenza dell'espressione oetica, a formare quel tipo classico di sentimento e di rappresentazione ella natura, che rifulge così splendidamente ne *La ginestra.*

Quando componeva *La ginestra*, nel 1836, nella villa Ferrigni alle falde el Vesuvio, LEOPARDI volse per l'ultima volta il pensiero e la parola alla ua diletta luna ed al sole folgorante e compose la poesia *Il tramonto della una*, che si può ben dire non abbia la pari nella poesia di tutta la terra.

Quale in notte solinga,
Sovra campagne inargentate ed acque,
Là 've zefiro aleggia,
E mille vaghi aspetti
E ingannevoli obbietti
Fingon l'ombre lontane
Infra l'onde tranquille
E rami e siepi e collinette e ville;
Giunta al confin del cielo,
Dietro Apennino od Alpe, o del Tirreno
Nell'infinito seno
Scende la luna; e si scolora il mondo;
Spariscon l'ombre, ed una
Oscurità la valle e il monte imbruna;
Orba la notte resta,
E cantando, con mesta melodia,
L'estremo albor della fuggente luce,
Che dianzi gli fu duce,
Saluta il carrettier dalla sua via;
Tal si dilegua, e tale
Lascia l'età mortale
La giovinezza . . . . . .
. . . . . .
Voi, collinette e piagge,
Caduto lo splendor che all'occidente
Inargentava della notte il velo,
Orfane ancor gran tempo
Non resterete; che dall'altra parte
Tosto vedrete il cielo
Imbiancar nuovamente, e sorger l'alba:
Alla qual poscia seguitando il sole,
E folgorando intorno
Con sue fiamme possenti,
Di lucidi torrenti
Inonderà con voi gli eterei campi.

Accenti come questi si possono riscontrare solo negli inni del *Rigveda*, del secondo millennio prima di Cristo, od in quel famoso *Inno al Sole*, composto nel 1370 avanti Cristo dal faraone Amenhotep IV, o Akhenaten, com'egli si chiamò, e scoperto inscritto sulla parete della tomba del suo grande scudiero, il nobile Ay, negli scavi di Tell-el-Amarna:

Bella è l'aurora sull'orlo del cielo,
O sole vivente, datore di vita.
Quando tu sorgi ad oriente,
Riempi di tua bellezza la terra:
Perchè tu sei bello, grande, splendente, ed alto
Coi tuoi raggi abbracci la terra, che tu hai creato.

Innanzi allo splendore di questi classici monumenti di poesia impallidiscono tutte le altre rappreseutazioni di simili spettacoli, anche se siano in sè stesse assai belle. Si veda, per esempio, la poesia alla luna di Shelley: « Sei tu pallida per la stanchezza di ascendere il cielo e di guardare sulla terra, vagando senza compagne tra le stelle che hanno una differente nascita, e sempre mutando, come un occhio senza gioia, che non trova oggetto degno della sua costanza?

Art thou pale for weariness
Of climbing and gazing on the earth,
Wandering companionless
Among the stars that have a differenth birth,
And ever changing, like a joyless eye,
That finds no object worth its constancy? »

Oppure dello stesso Shelley, nel *Prometeo slegato*, il dialogo tra Luna e Terra, così pieno di umani, troppo umani, pensieri e sentimenti.

Pensieri e sentimenti umani non turbano la serena visione della luna di Leopardi, anche quand'egli nel *Canto notturno di un pastore errante dell'Asia* attribuisce a lei, quale manifestazione dell'eterno e dell'infinito, una conoscenza transcendente la ragione umana:

Spesso quand'io ti miro
Star così muta in sul deserto piano,
Che, in suo giro lontano, al ciel confina;
Ovver con la mia greggia
Seguirmi viaggiando a mano a mano;
E quando miro in cielo arder le stelle;
Dico fra me pensando:
A che tante facelle?
Che fa l'aria infinita, e quel profondo

Infinito seren? che vuol dir questa
Solitudine immensa? ed io che sono?
Così meco ragiono: e della stanza
Smisurata e superba,
E dell' innumerabile famiglia;
Poi di tanto adoprar, di tanti moti
D' ogni celeste, ogni terrena cosa,
Girando senza posa,
Per tornar sempre là donde son mosse;
Uso alcuno, alcun frutto
Indovinar non so. Ma tu per certo,
Giovinetta immortal, conosci il tutto.
Questo io conosco e sento,
Che degli eterni giri,
Che dell' esser mio frale,
Qualche bene o contento
Avrà fors' altri; a me la vita è male.

In questo canto LEOPARDI tocca il vertice supremo della parabola della sua intuizione e rappresentazione della natura, nella sua più vasta manifestazione cosmica. Gli stessi giri di ERACLITO e di EPICURO, l' eterno ritorno di NIETZSCHE, i *semper eadem* di LUCREZIO sono da lui, con suprema evidenza e potenza di espressione, rappresentati in pochi versi; che, quasi come facce di gemma sfavillante, rinserrano e riverberano la luce della concezione cosmica esposta da KANT nella sua *Storia naturale generale e teoria del cielo*. LEOPARDI però, quando nutriva quei pensieri, non pensava ad alcuna filosofia occidentale; giacchè il 22 aprile del 1826 così scriveva nel suo *Zibaldone*, a Bologna: « Tutto è male. Cioè tutto quello che è, è male; che ciascuna cosa esista è un male; ciascuna cosa esiste per fin di male; l'esistenza è un male e ordinata al male; il fine dell' universo è il male; l' ordine e lo stato, le leggi, l' andamento naturale dell' universo non sono altro che male, nè diretti ad altro che al male. Non v' è altro bene che il non essere: non v' ha altro di buono che quel che non è: le cose che non son cose: tutte le cose sono cattive... Si potrebbe esporre e sviluppare questo sistema in qualche frammento che si supponesse di *un filosofo antico, indiano* ». Ed infatti, non solo il contenuto metafisico, fisico e soprattutto etico, col riconoscimento della santa verità del dolore, del *Canto notturno* corrisponde pienamente alla concezione della dottrina buddhista; ma anche la forma poetica ricorda, per esempio, l' inno 24.° del primo libro del *Rigveda*, in cui il vate chiede al cielo: « Perchè di giorno svaniscono le stelle, che a notte splendono alte su noi? Ma le leggi del cielo restano inviolate, e nella notte la luna s' avanza col suo splendore... »; e tutta la visione siderea di quell' immaginario pastore dell' Asia è quale poteva realmente averla dal

suo speco nel Himâlaya il santo eremita tibetano Milarepa, che la cantò nel suo *Sogno*:

Ho sognato che nel vasto settentrione del mondo
Una bella, grande montagna nevosa s'alzava:
La cima brillante di neve toccava il cielo;
Il sole e la luna le giravano intorno;
La sua luce riempiva tutto lo spazio
E la sua base copriva tutta la terra.

La visione serve a Milarepa solo come un simbolo dei principii della sua dottrina buddhista. Ma anche il *Canto notturno di un pastore errante dell' Asia* esprime i simboli dell'esistenza universale concepita da Leopardi.

Nel *Canto notturno* Leopardi aveva raggiunto, come ho già detto, il vertice sommo della sua parabola poetica, fissando da quel culmine l'infinito universo e i mondi e distaccandosi completamente, quasi come un asceta, dalla vita degli uomini sulla terra. Ma da quella culminazione, seguendo il ramo discendente della parabola, egli cominciò a guardare con occhio pietoso sul mondo ed a vedere, se dal male della vita potesse scaturire qualche bene e da tanto dolore del mondo potesse pur sorgere qualche gioia per gli esseri viventi. Ed a tale sentimento diede subito, nel 1829, espressione col canto *La quiete dopo la tempesta*, in cui alla serenità, dopo il tormento della tempesta, della natura inanimata, si associa la gioia degli animali selvatici e dei domestici, nonchè quella degli uomini:

Passata è la tempesta:
Odo augelli far festa, e la gallina,
Tornata in su la via,
Che ripete il suo verso. Ecco il sereno
Rompe là da ponente, alla montagna;
Sgombrasi la campagna
E chiaro nella valle il fiume appare.
Ogni cor si rallegra, in ogni lato
Risorge il mormorio,
Torna il lavoro usato.
L' artigiano a mirar l' umido cielo,
Con l' opra in man, cantando,
Fassi in su l' uscio; a prova
Vien fuor la femminetta a còr dell' acqua
Della novella piova;
E l' erbaiuol rinnova
Di sentiero in sentiero
Il grido giornaliero.

Ecco il Sol che ritorna, ecco sorride
Per li poggi e le ville. Apre i balconi,
Apre terrazzi e logge la famiglia:
E, dalla via corrente, odi lontano
Tintinnio di sonagli; il carro stride
Del passegger che il suo cammin ripiglia.
Si rallegra ogni core.
Sì dolce, sì gradita
Quand'è, com'or, la vita?

Ricantando questi versi, chi non pensa alla quarta ed alla quinta scena della *sesta sinfonia* di Beethoven, che il titano della musica aveva appunto intitolate: « tempesta » e « lieti e grati sentimenti dopo la tempesta »; ed in cui i violoncelli ed i bassi della melodia dell' arcobaleno fanno sentire con le loro note lo stesso sentimento, che Leopardi esprime con le sue parole?

Siffatto sentimento derivava in Leopardi dalla visione del dolore del mondo, cui son soggetti non gli uomini soltanto, ma tutti gli esseri viventi; pei quali quindi sorge una comunione nel patimento ed una fraterna pietà pel comune soffrire. Ciò egli aveva già sentito ed espresso nella sua meravigliosa ed ormai famosa descrizione del giardino, abbozzata nel suo *Zibaldone* a Bologna, il 22 aprile 1826: « Non gli uomini solamente, ma il genere umano fu e sarà sempre infelice di necessità. Non il genere umano solamente, ma tutti gli animali. Non gli animali soltanto, ma tutti gli altri esseri al loro modo. Non gl' individui, ma la specie, i generi, i regni, i globi, i sistemi, i mondi. Entrate in un giardino di piante, d' erbe, di fiori. Sia pur quanto volete ridente, sia nella più mite stagione dell' anno. Voi non potete volgere lo sguardo in nessuna parte che voi non vi troviate del patimento. Tutta quella famiglia di vegetali è in stato di *souffrance*, qual individuo più, qual meno. Là quella rosa è offesa dal sole, che gli ha dato la vita; si corruga, langue, appassisce. Là quel giglio è succhiato crudelmente da un' ape, nelle sue parti più sensibili, più vitali. Il dolce non si fabbrica dalle industriose, pazienti, buone, virtuose api senza indicibili tormenti di quelle fibre delicatissime, senza strage spietata di teneri fiorellini. Quell' albero è infestato da un formicaio, quell' altro da bruchi, da lumache, da zanzare; questo è ferito nella scorza e cruciato dall' aria o dal sole che penetra nella piaga; quello è offeso nel tronco o nelle radici; quell' altro ha più foglie secche; quest' altro è roso, morsicato nei fiori; quello trafitto, punzecchiato nei frutti. Quella pianta ha troppo caldo, questa troppo fresco; troppa luce, troppa ombra; troppo umido, troppo secco. L' una patisce incomodo e trova ostacolo e ingombro nel crescere, nello stendersi; l' altra non trova dove appoggiarsi, o si affatica o stenta per arrivarvi. In tutto il giardino tu non trovi una pianticella sola in istato di sanità perfetta. Qua un ramicello è rotto o dal vento a dal suo proprio peso; là un zeffiretto va

stracciando un fiore, vola con un brano, un filamento, una foglia, una parte viva di questa o quella pianta, staccata e strappata via. Intanto tu strazi le erbe co' tuoi passi; le stritoli, le ammacchi, ne spremi il sangue, le rompi, le uccidi. Quella donzelletta sensibile e gentile va dolcemente sterpando e infrangendo steli. Il giardiniere va saggiamente troncando, tagliando membra sensibili, colle unghie, col ferro. Certamente queste piante vivono; alcune perchè le loro infermità non sono mortali, altre perchè, ancora con malattie mortali, le piante, e gli animali altresì, possono durare a vivere qualche poco tempo. Lo spettacolo di tanta copia di vita all'entrare in questo giardino ci rallegra l'animo, e di qui è che questo ci pare essere un soggiorno di gioia. Ma in verità questa vita è triste e infelice, ogni giardino è quasi un vasto ospitale (luogo ben più deplorabile che un cimitero), e se questi esseri sentono o, vogliamo dire, sentissero, certo è che il non essere sarebbe per loro assai meglio che l'essere ».

Questi pensieri di Leopardi erano rimasti sepolti ed occulti per sessant'anni nelle casse del Ranieri, quando furono scoperti e cominciati a pubblicare nel 1898, in occasione del centenario della nascita del Poeta (ed ancora mi è vivo innanzi alla mente il mio pellegrinaggio di allora a Recanati e la visita al « paterno ostello »), con prefazione di Giosuè Carducci, che si inchinava ad amare ed a venerare in lui « Job insieme e il Lucrezio del pensiero italiano ».

Orbene, questi pensieri, ignoti ancora al mondo, erano espressi quasi con le stesse parole da Schopenhauer, nel marzo del 1858, al professore Frédéric Morin (autore anche di un lavoro su san Francesco d'Assisi), il quale li pubblicò nelle *Revue de Paris* del 1864. Eccone un frammento: « Ed ora ella non creda, caro signore, che io le esponga tutto ciò come un'elegia. Io affermo il generale predarsi, il predarsi di tutti da ciascuno e di ciascuno da tutti, ma non mi ci esalto contro; anzi ritengo, che ciò sia un'inevitabile conseguenza della natura delle cose. Tutte le specie di animali e di piante, inclusa la specie uomo, sono così prive di mezzi per bastare a loro stesse, sono condannate a tali brame e fatiche per vivere, che ciascun essere è costretto a combattere, per strappare con le unghie o coi denti il brano necessario alla vita. Ma non soltanto l'uomo fa guerra all'uomo e l'animale all'animale. No, nella tranquilla selva, che sembra sognare in disparte, nel prato, che allieta lo sguardo del poeta, è tutta un'intima guerra, un'inesorabile distruzione, da albero ad albero, da stelo a stelo, da fiore a fiore. Ogni radice si allunga silenziosamente nell'oscurità, per rubare il nutrimento alla vicina. Il musco e l'edera si avvinghiano alla quercia, per suggerne la linfa. Si guardi questa pianta impallidita e disseccata: essa è stata soffocata, uccisa da quelle che la circondavano in gelosa moltitudine. Le piante, mio caro signore, sono anche più micidiali degli uomini; ed io non posso passare senza spavento per la selva, tanto è l'odore di uccisione e di morte, che ne esala »: Il che pare quasi una parafrasi delle parole di Leopardi.

I due cognati e contemporanei pensatori di occidente erano stati però
eceduti di duemila quattrocento anni, in questa visione del dolore delle
ante, dal grande Savio d'oriente, che nel discorso XLV del *Majjhima-
kâyo* se ne servì come paragone, per indicare una delle cause del dolore, il
olore che deriva dall'amore. « Così come quasi, se verso la fine dell'estate
na pianta rampicante fruttificasse, ed un seme cadesse alla radice di un
obusto albero di sâla. Allora, la divinità, che vive nell'albero, atterrita e
sternata, entrasse in agitazione. Ma, ora, si avvicinassero amici e parenti
ella divinità, le divinità del bosco, le divinità della selva, le divinità degli
lberi, tutti gli dei, che animano erbe, piante e vette, si adunassero e par-
issero consolanti in coro: Non spaventarti, caro! Non spaventarti, caro!
enza dubbio questo grano di semenza sarà pur ingoiato da un fagiano o
nasticato da un capriuolo o annientato da un incendio della foresta o rac-
olto da lavoratori del bosco o trascinato via da formiche o addirittura non
ermoglierà. Però questo seme, non venisse ingoiato da un fagiano, nè ma-
ticato da un capriuolo, nè annientato da un incendio della foresta, nè rac-
olto da lavoratori del bosco, nè trascinato via dalle formiche, ma germo-
liasse. Durante la stagione delle piogge s'innalzasse, crescesse pienamente,
osse divenuto liana, giovine, flessuosa, morbida, portante viticci, e questa
tringesse bramosamente il robusto albero di sâla. Allora, la divinità che
ive in quell'albero si sentirebbe così: Perchè dunque i miei cari amici
parenti, le divinità del bosco, le divinità della selva, le divinità degli
lberi, gli dei delle erbe, delle piante e delle vette, hanno temuto futuro
pavento dal grano di semenza e insieme mi hanno parlato così: Non
paventarti, caro! Non spaventarti, caro! Senza dubbio questo grano di se-
nenza sarà pur ingoiato da un fagiano o masticato da un capriuolo o an-
nientato da un incendio della foresta o raccolto da lavoratori del bosco o
rascinato via da formiche o addirittura non germoglierà? È pur dolce,
li essere avvitichiato da questa giovine, flessuosa, morbida liana! Ed essa
si attorcesse intorno al robusto tronco, attorta al robusto tronco si dira-
masse in alto, diramandosi in alto mandasse giù un velame di tralci, e con
questo velame di tralci essa soffocasse allora i possenti, possenti rami del
obusto albero di sala. Allora, la divinità che vive in quello albero si sen-
tirebbe così: Questo è quello spavento, che hanno previsto i miei cari
amici e parenti, le divinità del bosco, le divinità della selva, le divinità
degli alberi, gli dei delle erbe, delle piante e delle vette, e perciò essi tutti
insieme hanno voluto consolarmi: perchè quel seme è la causa, per cui io
provo dolorose, brucianti, pungenti sensazioni! » La maniera di esporre di
Gotamo Buddho è più serena di quella di Leopardi e di Schopenhauer. La
serenità è una caratteristica della dottrina buddhista, esposta dal suo fon-
datore per salvezza degli esseri, che egli vedeva torcersi nel dolore della
vita e di cui sentì infinita pietà.

Ma una particella di tale pietà, destata dallo spettacolo del dolore del

mondo, fu quella che spinse anche LEOPARDI, sul tramonto della sua breve vita, nel 1836, a dire ne *La ginestra* una parola di giustizia e d'amore per gli uomini. Quel canto immortale è noto a tutti gli italiani di media istruzione, che lo hanno nella mente o nel cuore. Dal dolcissimo odore dell'umile ginestra, passando pei furori del vulcano, che egli pel Vesuvio descrisse anche più stupendamente di quelli, che per l'Etna avevano descritto ESCHILO e PINDARO; dalla distruzione delle città e dall'annientamento dei popoli degli uomini e delle formiche egli risalì di nuovo alla contemplazione dell'universo:

Sovente in queste rive,
Che, desolate, a bruno
Veste il flutto indurato, e par che ondeggi,
Seggo la notte; e su la mesta landa
Veggo dall'alto fiammeggiar le stelle,
Cui di lontan fa specchio
Il mare, e tutto di scintille in giro
Per lo voto seren brillare il mondo.
E poi che gli occhi a quelle luci appunto,
Ch'a lor sembrano un punto,
E sono immense; in guisa
Ch'un punto a petto a lor son terra e mare
Veracemente; a cui
L'uomo non pur, ma questo
Globo ove l'uomo è nulla,
Sconosciuto è del tutto; e quando miro
Quegli ancor più senz'alcun fin remoti
Nodi quasi di stelle
Ch'a noi paion qual nebbia, a cui non l'uomo
E non la terra sol, ma tutte in uno,
Del numero infinite e della mole,
Con l'aureo sole insiem, le nostre stelle
O sono ignote, o così paion come
Essi alla terra, un punto
Di luce nebulosa; al pensier mio
Che sembri allora, o prole
Dell'uomo? E rimembrando
Il tuo stato quaggiù, di cui fa segno
Il suol ch'io premo; e poi dall'altra parte,
Che te signora e fine
Credi tu data al Tutto, e quante volte
Favoleggiar ti piacque, in questo oscuro
Granel di sabbia, il quale di terra ha nome,

Per tua cagion, dell' universe cose
Scender gli autori,... qual moto allora,
Mortal prole infelice, o qual pensiero
Verso te finalmente il cor m' assale?
Non so se il riso o la pietà prevale.

La pietà prevalse. Il poeta nel suo canto descrisse la nobile natura di colui, che ardisce sollevare gli occhi mortali contro il comun fato, nulla al vero detraendo e confessando il male che ci fu dato in sorte, mostrandosi grande e forte nel soffrire, aiutando gli esseri accomunati nel dolore:

e tutti abbraccia
Con vero amor, porgendo
Valida e pronta ed aspettando aita
Negli alterni perigli e nelle angosce
Della guerra comune.

Innanzi a quel « tutti abbraccia con vero amor » come non ricordarsi ancora una volta di BEETHOVEN e della sua *nona sinfonia?* Dopo il grido di disperazione, espresso dalle terribili dissonanze dell'orchestra, interviene la voce umana, come scrisse WAGNER, a portare luce nel caos, rivolgendo agli strumenti le parole del recitativo, scritte dal Maestro: « O amici, non questi toni! ma accordiamone altri più grati, più lieti ». Ed ecco prorompere il canto fermo del coro, cantante l'*inno alla gioia* di SCHILLER, culminante nelle sublimi parole: « Abbracciatevi, milioni, questo bacio a tutto il mondo:

Seid umschlungen, Millionen,
Diesen Kuss der ganzen Welt! »

Sic res accendent lumina rebus. E se questo mio breve saggio è riuscito, più che altro, un' antologia di frammenti, pure dalla chiara lettera di essi, più che dalla mia oscura chiosa, risulta evidente, per chi bene intenda, quanto fosse vivo e grande il sentimento della natura in LEOPARDI.

COMPLEMENTI SUL CALCOLO DELLA DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI TANGENZIALI IN PRISMI SOGGETTI A TORSIONE OD A TAGLIO. — SPECIALI AVVERTENZE PER I CASI DI SEZIONI PRESENTANTI PUNTI ANGOLOSI, (IN PARTICOLARE RETTANGOLARI).

Nota del Socio corrispondente **Carlo Luigi Ricci**

(Adunanza del dì 6 febbraio 1937 - XV)

Sunto. — Si espongono alcuni complementi sul calcolo delle funzioni armoniche, dalle quali, secondo i noti concetti della teoria dell'elasticità, dipende la distribuzione delle tensioni tangenziali provocate dalla torsione o dal taglio sulla sezione retta di un prisma. Con riferimento al noto metodo realizzante per approssimazione le dette funzioni mediante combinazioni di polinomi armonici del tipo $r^n \cos(n\varphi)$ o $r^n \operatorname{sen}(n\varphi)$, si espongono alcuni avvedimenti analitici per i casi in cui il contorno della sezione presenti dei punti angolosi. Si considera dapprima una sezione semplicemente connessa, (cioè piena, con un solo contorno connesso); si distinguono i casi di punti angolosi convessi (verso l'esterno), acuti, retti ed ottusi. Utilizzando note relazioni di geometria differenziale, dalle direzioni delle tangenti nel punto angoloso si ricavano condizioni tra i coefficienti incogniti, per cui si devono moltiplicare i polinomi armonici sopra detti. Per punti angolosi concavi (verso l'esterno) si propone l'uso di speciali funzioni del tipo $r^k \cos(k\varphi)$ (per k frazionario, opportunamente scelto). Si dimostra che tali funzioni non sono utilizzabili per punti angolosi di un contorno interno in una sezione cava (— od a connessione multipla —); per simili casi vengono indicati altri opportuni artifizii analitici.

I. — TORSIONE

Dalla teoria tecnica dell'elasticità è ben noto che sulla sezione retta di un prisma soggetto a torsione semplice, la tensione tangenziale è il prodotto del momento torcente per un fattore determinabile con l'equazione di equilibrio complessivo alla rotazione intorno all'asse del prisma, e per un vettore $\overline{\xi}$ di componenti ξ ed η date dalle relazioni:

$$\xi = -\frac{\partial F}{\partial y} \quad ; \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial x} , \tag{1}$$

ove:

$$F = \Phi + \frac{1}{2} r^2 \tag{2}$$

essendo r il raggio vettore del punto generico, e Φ una funzione delle coordinate x, y, la quale deve essere armonica:

$$\Delta_2 \Phi = 0$$

e perciò:

$$\Delta_2 F = 2$$

con l'ulteriore condizione che sul contorno sia:

$$F = \text{costante } (= F_0)$$

Secondo la nomenclatura relativa alla ben nota «*analogia idrodinamica*» la funzione F costituisce la *funzione di corrente o funzione di flusso* del vettore $\overline{\zeta}$; e le equazioni $F = C$, per varii valori di C rappresentano le *linee di corrente o di flusso*, o che dir si voglia — le *traiettorie* del vettore $\overline{\zeta}$, (e perciò delle tensioni tangenziali).

Le espressioni (1) e (2) corrispondono ad un momento torcente positivo nel senso rotatorio da $+x$ verso $+y$: ne consegue che la funzione di flusso F deve risultare crescente quando si proceda, normalmente alle predette traiettorie, dall'interno della sezione verso il contorno. Ciò è anche in armonia con la pure ben nota «*anologia di Prandtl*» [1]).

È anche noto che la Φ si può realizzare con buona approssimazione come combinazione lineare di polinomii armonici, i quali, sotto forma polare, si possono esprimere nei due tipi seguenti:

$$P_n = r^n \cos(n\varphi) \qquad ; \qquad Q_n = r^n \operatorname{sen}(n\varphi)$$

per n intero.

I coefficienti, per i quali, nella predetta combinazione lineare, devono essere moltiplicati i varii polimonii armonici componenti, si determinano in modo da soddisfare per approssimazione la sopra ricordata condizione al contorno.

Fu proposto di impostare il qui citato calcolo, mediante il metodo dei *minimi quadrati*, cioè imponendo che sia minimo l'integrale di linea, lungo il contorno, del quadrato della differenza tra il valore di F in un punto generico del contorno ed il valore medio F_0 lungo il contorno stesso.

Riservandoci di discutere in altra sede l'opportunità dell'applicazione di tale metodo, in relazione con l'approssimazione ch'esso può consentire, ci limitiamo qui ad osservare che il metodo stesso attribuisce un «*peso*» uniforme agli scostamenti di F da F_0 sul contorno, mentre si può prospet-

---

[1]) v. Föppl, *Drang und Zwang*. (R. Oldenbourg. — München und Berlin, 1920) Vol. II Cap. VI, n. 67, pag. 86-89.

tare più opportuno attribuire all'approssimazione della condizione al contorno una maggiore importanza in alcune zone del contorno, in confronto di altre, in relazione con le particolarità di forma della sezione.

È ovvia l'opportunità di realizzare con particolare approssimazione la condizione al contorno proprio in corrispondenza di punti o zone presentanti particolarità degne di rilievo, come per esempio nel caso di archi di grande curvatura, o — specialmente — di punti angolosi.

Ci riserviamo di indicare in altro studio il modo di realizzare più intima approssimazione della condizione al contorno in punti di massima curvatura. Qui vogliamo esclusivamente considerare il modo di realizzare con esattezza la condizione al contorno in corrispondenza dei punti angolosi del contorno stesso.

A tale scopo, consideriamo la superficie $z = F$, (cfr. ancora la nota [1]), le cui linee di livello $z = C$ sono le già citate traiettorie, una delle quali è lo stesso contorno.

Consideriamo del contorno un punto angoloso convesso (verso l'esterno), e supponiamo per ora che l'angolo *interno* tra le due tangenti nel punto stesso sia *acuto*.

Conforme ai noti concetti di geometria differenziale, dette tangenti costituiscono le tangenti alle *linee asintotiche*, nel punto considerato, della superficie $z = F$, la quale nel punto stesso risulta tangente al piano della sezione, rappresentato da $z = F_0$. Per questa ultima condizione, deve essere nel punto in questione:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad ; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \,. \tag{3}$$

Inoltre se diciamo i_1 ed i_2, delle due tangenti stesse le inclinazioni contate rispetto all'asse delle x, secondo quanto è ben noto, i_1 ed i_2 devono essere le radici dell'equazione quadratica in i:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} i^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} i + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \tag{4}$$

da cui si ricava ovviamente:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = i_1 i_2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \tag{5}$$

$$2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -(i_1 + i_2) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \tag{6}$$

Le relazioni (3), (5). e (6) forniscono così quattro condizioni tra i coefficienti incogniti, moltiplicatori dei polinomi armonici nella sopra illustrata combinazione lineare.

Si possono ottenere sotto altra forma due condizioni equivalenti alle) e (6), in base ai concetti seguenti. Le bisettrici b_1 e b_2 dell' angolo completo formato dalle due tangenti nel punto angoloso costituiscono le *rette principali* della superficie $z = F$ nel punto considerato P.

Perciò in P deve essere:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial b_1 \cdot \partial b_2} = 0 \tag{7}$$

Inoltre se α è l'angolo che ciascuna delle dette tangenti asintotiche el punto P forma con la bisettrice b_1, (p. es. interna), in P deve pure ssere:

$$\operatorname{tang}^2 \alpha = -\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial b_1^2}}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial b_2^2}} \tag{8}$$

Le derivate seconde della F nelle due direzioni b_1 e b_2 si possono agevolmente esprimere, con le notissime relazioni, mediante i *dati* coseni direttori delle bisettrici b_1 e b_2, e le derivate seconde della stessa F rispetto ad x ed y. Si hanno dunque nelle (7) ed (8) altre condizioni tra i sopra citati moltiplicatori incogniti. Queste condizioni sono equivalenti alle (5) e (6), perché *esprimono lo stesso fatto geometrico* da queste rappresentato. La nuova forma può risultare, in qualche caso speciale, più opportuna e più comoda per il calcolo numerico.

È utile osservare che nell' immediato intorno del punto P la superficie $z = F$ si può sostituire col paraboloide (quadrico) osculatore alla superficie in P stesso. Assumendo l'origine in P e gli assi x ed y coincidenti con le sopra descritte bisettrici b_1 e b_2, l'equazione del detto paraboloide è:

$$z - F_0 = \frac{1}{2}\left[(a+1)\,x^2 - (a-1)\,y^2\right] \tag{9}$$

od anche, sotto forma polare:

$$z - F_0 = \frac{a}{2}\, r^2 \cos(2\varphi) + \frac{1}{2}\, r^2 \tag{9bis}$$

essendo:

$$a = \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right]_0 = -\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right]_0,$$

ove l'indice 0 indica il valore assunto in P.

Le rette asintotiche sono complessivamente rappresentate da:

$$(a+1)x^2-(a-1)y^2=0$$

ovvero:

$$a\cos(2\alpha)+1=0$$

e perciò si ha:

$$\operatorname{tang}^2\alpha=\frac{a+1}{a-1} \qquad (10)$$

od anche:

$$a=\frac{-1}{\cos(2\alpha)}\,. \qquad (10^{bis})$$

Perchè tang α sia reale e finita occorre che a risulti esterno all'intervallo: $-1 \div +1$.

Inoltre dalla (9), perchè sia soddisfatta la già citata condizione di z crescente col procedere dall'interno verso il contorno, si ricava che deve essere: $a+1<0$, e perciò: tang $\alpha<1$: dunque l'angolo 2α compreso tra le tangenti nel punto angoloso P deve essere acuto.

Angolo retto

Se 2α è retto, dalle (10) e (10^{bis}) risulta:

$$\frac{a+1}{a-1}=1 \qquad ; \qquad a=\frac{-1}{\cos\frac{\pi}{2}}\,,$$

e per soddisfare questa condizione occorre che sia:

$$a=\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right]_0=-\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right]_0=-\infty\,.$$

Ciò si può ottenere introducendo nella combinazione lineare sopra descritta una funzione del tipo $r^k\cos(k\varphi)$, con asse polare sulla bisettrice interna b_1 (ora asse x), positivo verso l'interno, e col polo vicinissimo a P, situato però all'esterno della sezione, in modo che P sia rappresentato dalle coordinate polari $r=0$ e $\varphi=0$.

La funzione si annulla, insieme con le sue prime derivate in P; perchè le derivate seconde (p. es. quella rispetto ad r), siano infinite in P occorre che l'esponente k sia compreso tra 1 e 2, esclusi gli estremi:

$$1<k<2\,.$$

La detta funzione, per k non intera è notoriamente polidroma, in quanto assume valori distinti per valori di φ che differiscono per un multiplo di

π; ma questo fatto, nella presente applicazione, non produce alcun inconveniente, poichè, comunque varii il punto generico nella sezione, il raggio vettore non potrà mai compiere un intero giro intorno al polo, o, in altri termini, nessun circuito chiuso, tracciato nell'interno della sezione, può racchiudere il polo della funzione ausiliaria, in quanto tale polo è stato scelto adiacente, ma esterno al contorno; questa esclusione del detto polo dal contorno è ancora opportuna anche perchè la detta funzione nel polo stesso presenta un «*punto singolare*», nel quale esclusivamente essa *non* si comporta come *armonica*.

Ciò posto, nell'intorno di P la funzione F si può esprimere come segue:

$$F - F_0 = [a\cos(2\varphi) + 1]\frac{r^2}{2} - Br^k\cos(k\varphi). \qquad (11)$$

Conviene assumere: $a < -1$ e $k < 2$, ma molto prossimo a 2 stesso. Con ciò la prima parentesi a 2.° membro si annulla per $\pm\varphi = \alpha_0$, positivo, definito da: $\cos(2\alpha_0) = \frac{-1}{a} > 0$, e perciò $\alpha_0 < \frac{\pi}{4}$; d'altra parte l'ultimo termine della (11) si annulla per $\pm\varphi = \varphi_0 > \frac{\pi}{4}$ e molto prossimo a tale valore limite. Si ricava: $k = \frac{\pi}{2\varphi_0}$. È facile verificare che entrambi i termini del 2.° membro della (11) sono negativi per $|\varphi| < \alpha_0$, mentre per $\alpha_0 < |\varphi| < \varphi_0$ detti termini sono di segno contrario: perciò la $F - F_0$ si annulla in punti interni agli angoli *semplici, acuti,* compresi tra i raggi $\varphi = \alpha_0$ e $\varphi = \varphi_0$ o rispettivamente $\varphi = -\alpha_0$ e $\varphi = -\varphi_0$.

La linea $F - F_0 = 0$ presenta dunque un *ramo* contenuto nell'interno dell'angolo definito da $\alpha_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$; è facile riscontrare che per $r = 0$, (cioè nel vertice P), tale *ramo* risulta tangente al raggio $\varphi = \varphi_0$, mentre per $r = \infty$ la direzione della linea è quella stessa del raggio $\varphi = \alpha_0$: inoltre la distanza del punto generico da detto raggio $\varphi = \alpha_0$, per $r = \infty$ diventa infinita dell'ordine di r^{k-1}, cioè di ordine di poco inferiore ad 1; ciò significa che il detto ramo *non* ha asintoto. Per evidente simmetria la curva $F - F_0 = 0$ presenta analogo comportamento per φ compreso tra i valori $-\alpha_0$ e $-\varphi_0$.

La costante B si può determinare con la condizione che sia $F = F_0$ in un punto assegnato del lato $\varphi = \frac{\pi}{4}$, ad una data distanza $r = r_1$ dal vertice P. Si ricava così:

$$B = \frac{r_1^{(2-k)}}{2\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right)}$$

e quindi la (11) diviene:

$$F - F_0 = \left[1 - \frac{\cos(2\varphi)}{\cos(2\alpha_0)}\right]\frac{r^2}{2} - \frac{r_1^{(2-k)}}{2} \cdot \frac{\cos(k\varphi)}{\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right)} r^k. \qquad (11^{bis})$$

L'equazione polare della linea $F - F_0 = 0$ risulta così:

$$\left[1 - \frac{\cos(2\varphi)}{\cos(2\alpha_0)}\right] r^{(2-k)} = \frac{\cos(k\varphi)}{\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right)} r_1^{(2-k)}. \qquad (12)$$

Risolvendo rispetto ad r si trova:

$$r = r_1 \left\{ \frac{\cos(2\alpha_0)\cos(k\varphi)}{\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right)[\cos(2\alpha_0) - \cos(2\varphi)]} \right\}^{\frac{1}{2-k}}. \qquad (13)$$

Per il nostro particolare problema meccanico hanno significato, tra i punti della detta linea, solo quelli per cui $r > 0$: perciò dalla (13) risulta confermata la proprietà già riscontrata, che cioè il *ramo* della curva che ci interessa contiene solo punti, per i quali sia $\alpha < |\varphi| < \varphi_0$.

Può essere istruttivo calcolare la distanza y del punto generico del ramo $\alpha < \varphi < \varphi_0$ dal raggio $\varphi \quad \frac{\pi}{4}$ (che è un lato dell'angolo retto qui considerato); si ha ovviamente:

$$y = r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right), \qquad (13^{bis})$$

che risulta positiva se detto punto generico è *interno* all'angolo retto qui studiato.

Si è detto che conviene assumere k di pochissimo inferiore a 2. Infatti con tale scelta l'esponente a 2.° membro della (13), $\frac{1}{2-k}$, risulta molto grande: quindi dalla (13) risulta che per valori di φ anche di pochissimo inferiori a $\frac{\pi}{4}$ il raggio r è grandissimo, mentre per valori di φ anche di pochissimo superiori a $\frac{\pi}{4}$, il raggio r è piccolissimo: ciò prova che la linea $F = F_0$, col suo ramo qui considerato, si scosta pochissimo dal raggio $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (uno dei lati del nostro angolo).

Comportamento analogo si ha per il ramo simmetrico, per valori di φ opposti dei precedenti.

Questo risultato si desume anche più chiaramente considerando la (13^{bis}), tenendo presente la (13), ed osservando che $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$ assume sempre valori assai piccoli.

Si fece una verifica numerica, a titolo d'esempio, per $\varphi_0 = 46^0$ e per $\alpha_0 = 40^0$, ricavando $k = \frac{45}{23}$ e quindi $2 - k = \frac{1}{23}$: nel tratto $r < r_1$ si trovarono valori di y non superiori ai due decimillesimi di r_1, mentre per $r = \sim 1{,}6\, r_1$ si calcolò un valore di y minore dei tre millesimi di r_1. Si può certo otte-

re un'approssimazione tanto maggiore quanto più i valori α_0 e φ_0 si as-
mono prossimi al valore $\frac{\pi}{4}$.

Resta così dimostrato e verificato che la funzione F nel punto angoloso
nvesso (verso l'esterno) rettangolare P, si può realizzare con grandissima
pprossimazione con l'introduzione di una funzione del tipo $B\rho^k \cos(k\varphi)$
er k di pochissimo inferiore a 2, con le avvertenze sopra specificate e con
ulteriore condizione che la rimanente parte della detta funzione comples-
va, e cioè la $F - B\rho^k \cos(k\varphi)$, in P abbia la derivata seconda, presa lungo
bisettrice interna dell'angolo retto, negativa ed in valore assoluto molto
rande. È superfluo specificare che quest'ultima condizione, conforme alla
1) ed alla già esposta relazione $\cos(2\alpha_0) = \frac{-1}{a}$, conduce ad assumere α_0
olto prossimo a $\frac{\pi}{4}$.

Angolo ottuso.

Se l'angolo 2α tra le due tangenti nel punto angoloso è ottuso $\left(\alpha > \frac{\pi}{4}\right)$,
alla (10) si ricava:

$$\frac{a+1}{a-1} = \operatorname{tang}^2\alpha > 1$$

a cui:

$$a = \frac{\operatorname{tang}^2\alpha + 1}{\operatorname{tang}^2\alpha - 1} > 0 \qquad (14)$$

nde « a fortiori »:

$$a + 1 > 0$$

quindi anche:

$$a - 1 > 0 .$$

Ne consegue che il paraboloide osculatore (9) nell'angolo *interno* tra
e due rette asintotiche (ove cade l'asse $x \equiv b_1$), presenta ordinate $z - F_0$
positive, cioè *non* è soddisfatta la già citata condizione, che $z = F$ sia
crescente procedendo dall'interno della sezione verso il contorno.

Perchè invece questa necessaria condizione risulti soddisfatta occorre
che la funzione F nell'intorno di P venga espressa come segue, (con le
stesse avvertenze più sopra specificate):

$$F - F_0 = [a\cos(2\varphi) + 1]\frac{\rho^2}{2} - B\rho^k \cos(k\varphi) \qquad (15)$$

essendo $a>1$ ed espressa secondo la (10bis) e $k=\frac{\pi}{2\alpha}$; (con ciò, essendo $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, risulta $1<k<2$).

Si può anche scrivere:

$$F-F_0=\left[1-\frac{\cos(2\varphi}{\cos(2\alpha}\right]\frac{r^2}{2}-Br^k\cos(k\varphi). \qquad (15^{bis})$$

Si deve ora ricercare la linea $F=F_0$: di essa fanno evidentemente parte i due raggi $\varphi=\pm\alpha$, che sono i lati dell'angolo ottuso considerato. Inoltre la linea presenta anche un altro *ramo*, che si può esplicitamente studiare e discutere come segue:

Sia P_0 un punto di coordinate polari $\varphi=0$ ed $r=r_0$, in cui sia $F=F_0$; si può in conseguenza esprimere il coefficiente B in funzione di r_0

$$B=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{\cos(2\alpha}\right]r_0^{2-k}. \qquad (16)$$

[Si noti che $B>0$, essendo $\cos(2\alpha)<0$].

Con ciò, secondo la (15bis), con facili trasformazioni, come equazione del luogo $F=F_0$ si trova:

$$r=r_0\left\{\frac{\cos(2\alpha)-1}{\cos(2\alpha)-\cos(2\varphi)}\cdot\cos(k\varphi)\right\}^{\frac{1}{2-k}}. \qquad (17)$$

Per $\varphi=\pm\alpha$ risulta $r=\frac{0}{0}$, indeterminato: ciò conferma che al luogo appartengono i due raggi $\varphi=\pm\alpha$; l'ulteriore ramo della linea incontra questi stessi raggi in due punti P_1 e P'_1, (singolari, doppî), i quali corrispondono ad un valore r_1 di r, che si ottiene facilmente applicando il noto teorema di L'Hôpital:

$$r_1=r_0\left\{k\,\frac{1-\cos(2\alpha)}{2\,\mathrm{sen}\,(2\alpha)}\right\}^{\frac{1}{2-k}} \qquad (18)$$

ed in tali punti il detto *ramo* incontra ciascuno di detti raggi sotto un angolo ϑ_0, dato da

$$\mathrm{tang}\,\vartheta_0=\frac{-2(2-k)}{\mathrm{sen}\,(4\alpha)}, \qquad (19)$$

espressione che pure si ricava con applicazione ripetuta del teorema di L'Hôpital.

Si noti ora che l'area (a guisa di «settore») racchiusa tra i lati PP_1 e PP'_1 e l'arco $P_1P_0P'_1$ del residuo *ramo* della linea (17), può riguardarsi come una «sezione» (di un prisma), per la quale la «*funzione di flusso*»

è *esattamente* e *rigorosamente* espressa dalla (15bis), in cui si sostituisca valore di B fornito dalla (16).

Per quanto riguarda poi la già accennata « combinazione lineare » di nzioni armoniche a costituire la *funzione di flusso* per una data sezione esentante uno o più punti angolosi, (di cui quello in P ottuso), la (15bis), n la sostituzione (16), rappresenta unicamente l'andamento della funzione nelle vicinanze di P [come la (9) e la (11bis) rappresentano analogo anmento nei casi dell'angolo ottuso o di quello retto rispettivamente], anche lo scopo di illustrare e verificare la convenienza e l'opportunità dell'adone della funzione *correttiva* $B_1 r^k \cos(k\varphi)$, con le avvertenze già specificate.

Quantunque superfluo, può tuttavia essere opportuno, al fine di una aggiore chiarezza, precisare che per la data sezione la F dovrà venir alizzata *per approssimazione* introducendo nella già detta combinazione neare altre funzioni armoniche (in particolare polinomî P_n e Q_n), opportamente scelte ed affette da coefficienti incogniti da determinarsi in modo soddisfare con buona approssimazione le note condizioni sul contorno ffettivo della sezione.

Nel caso qui studiato del punto angoloso ottuso, è degno di nota che F data dalla (15bis) riesca a *realizzare esattamente la condizione al contorno sui lati dell' angolo*. Ciò costituisce un fatto prezioso per la realizzaone di un'ottima approssimazione nella sopra illustrata combinazione neare.

Angolo concavo verso l'esterno (o rientrante).

(Ben inteso per il contorno esterno, *esclusi* punti di contorni interni i sezioni a connessione multipla).

In questo caso l'angolo compreso tra le due tangenti, *dalla parte interna* della sezione è $2\alpha > \pi$. È noto che nel vertice P di un tale angolo ientrante la tensione $\overline{\zeta}$, in altri termini la « *massima pendenza* » della uperficie $z = F$, deve essere infinita. D'altra parte si deve tener presente he il contorno è *linea di livello* per la detta superficie.

Perciò la distribuzione della $\overline{\zeta}$ in prossimità di P si può realizzare ntroducendo nella nota combinazione lineare una funzione ancora del tipo $r^k \cos(k\varphi)$ con le solite avvertenze: asse polare coincidente con la bisetrice interna dell'angolo rientrante (con senso positivo verso l'interno della ezione), con polo in prossimità di P, ma esterno alla sezione (in modo che sia $r = 0$ e $\varphi = 0$).

Si assuma:

$$k = \frac{\pi}{2\alpha} ;$$

on ciò, per $\varphi = \pm\alpha$ la funzione ausiliaria correttiva si annulla: così è

soddisfatta in prossimità di P la condizione che il contorno sia linea di livello per la superficie $z = F$, o — che dir si voglia — traiettoria della $\bar{\zeta}$.

II. — TAGLIO

Ancora dalla teoria tecnica dell'elasticità è noto che sulla sezione retta di un prisma soggetto a taglio, la tensione tangenziale è:

$$\bar{\tau} = \frac{T_y}{I_x} \bar{\zeta} ,$$

ove T_y è del taglio la componente normale all'asse neutro x, I_x il momento d'inerzia della sezione rispetto allo stesso asse x, e $\bar{\zeta}$ un vettore di componenti ξ ed η date dalle relazioni:

$$\xi = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \quad , \quad \eta = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{x^2}{2(m+1)} - \frac{y^2}{2} \tag{20}$$

(origine degli assi nel baricentro: $\frac{1}{m}$ = coefficiente di Poisson); Φ_1 essendo una funzione delle coordinate, armonica: $\Delta_2 \Phi_1 = 0$; sul contorno la Φ_1 deve assumere i valori espressi da:

$$\Phi_1 - [\Phi_1]_0 = \frac{1}{2} \int_0^s y^2 dx - \frac{x^3}{6(m+1)} , \tag{21}$$

ove $[\Phi_1]_0$ è il valore di Φ_1, in un punto del contorno ove sia $x = 0$, dal quale punto si conta nel verso delle x crescenti e proseguendo ciclicamente sul contorno, l'arco s al quale è esteso l'integrale a 2° membro, che è un integrale di linea calcolato lungo il contorno.

È anche noto che, come per la torsione, la funzione Φ_1, si può esprimere quale combinazione lineare dei polinomii armonici della forma polare sopra richiamata, per n intero; e che i moltiplicatori incogniti dei singoli polinomii si possono determinare soddisfacendo per approssimazione le condizioni al contorno, in due modi distinti: o realizzando esattamente la (21) in punti convenientemente scelti sul contorno, — o in pari numero di punti realizzando la condizione che il vettore $\bar{\zeta}$ sia diretto tangenzialmente al contorno; (non escludendo di poter applicare simultaneamente i due modi, per un numero di punti complessivamente pari al numero dei moltiplicatori incogniti).

Se sul contorno si ha un punto angoloso P convesso di coordinate x_1, y_1, situato in posizione generica, in esso dovranno essere soddisfatte le condizioni seguenti:

— in P dovrà essere nulla la $\bar{\zeta}$ e perciò nulle entrambe le sue

mponenti:

$$[\xi]_1 = 0 \qquad ; \qquad [\eta]_1 = 0 \tag{22}$$

quali, espresse mediante le (20), forniscono due equazioni tra i molti-licatori incogniti.

— partendo da P e compiendo uno scostamento infinitesimo di proie-ioni dx e dy lungo una delle due tangenti nel punto angoloso, della quale i indichi con i l'inclinazione rispetto all'asse x, la $\overline{\zeta}$ dovrà assumere un ncremento $d\overline{\zeta}$, inclinato della stessa i: cioè si dovrà avere:

$$i = \frac{\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\,dy}{\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\,dy}$$

ove deve essere: $dy = i\,dx$ e perciò, riducendo a forma intera ed ordinando:

$$i^2 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + i\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) - \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

ed infine, tenendo presenti le (20) si trova:

$$i^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + i\left(2\,\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} - y_1\right) + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{x_1}{m+1} = 0 \tag{23}$$

Le inclinazioni (date) i_1 ed i_2 delle due tangenti nel punto angoloso devono essere le radici dell'equazione quadratica in i (23), e perciò si ricava notoriamente:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{x_1}{m+1} = i_1 i_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \tag{24}$$

$$2\,\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} - y_1 = -(i_1 + i_2)\,\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \tag{25}$$

(che devono essere verificate in P).

Si ottengono così altre due equazioni tra i moltiplicatori incogniti.

Se poi il punto P è uno dei punti più lontani dall'asse neutro x, in esso punto notoriamente devono convergere tutte le traiettorie delle $\overline{\zeta}$, e quindi la (23) deve dare per i una espressione indeterminata (ossia deve essere soddisfatta per qualsiasi valore di i), e perciò in P deve essere:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad 2\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} - y_1 = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{x_1}{m+1} = 0. \tag{25bis}$$

Quindi in tal caso in P, oltre alle due condizioni (22), in luogo delle (24) e (25), si hanno le tre condizioni (25^{bis}).

Angolo retto.

Se il punto angoloso è rettangolare, allora deve essere:

$$i_1 i_2 = -1$$

e quindi dalla (24) si deduce:

$$1 = \frac{\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{x_1}{m+1}}{-\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}} \tag{26}$$

e, dato che $\Delta_2 \Phi_1 = 0$, il primo termine a numeratore è uguale al denominatore: ne consegue che, per $x_1 \neq m+1$ e $x_1 \neq 0$, la (26) può essere soddisfatta solo se in P si ha:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = \infty \tag{27}$$

[notando che se $x_1 = m+1$ la (26) si può soddisfare anche per $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 0$, in P. Escludiamo quest'ultimo caso, in quanto esso importa soluzione ovvia, ed anche perchè esso è assai poco probabile].

La condizione (27) si può soddisfare introducendo nella sopra detta combinazione lineare una funzione del tipo $r^k \cos(k\varphi)$ per $1 < k < 2$, in modo analogo a quanto è stato detto per l'*angolo retto*, nel contorno di sezione soggetta a torsione, con le stesse modalità ed avvertenze colà specificate.

Angolo ottuso.

Per l'angolo ottuso, in questo caso del taglio, data la natura delle relazioni (20), è facile verificare che *non* si presenta il *comportamento anomalo* che è stato segnalato nel caso precedente della torsione, in base alla (9), (10), e (14), e successivamente eliminato con opportuno artifizio. Perciò qui le condizioni (24) e (25), ovvero le (25^{bis}) sono applicabili senz'altro per angoli acuti ed ottusi (escluso l'angolo retto, per il quale occorre tenere presente l'avvertenza poco sopra indicata).

Angolo concavo verso l'esterno (o rientrante).

Anche per il taglio il problema dell'angolo concavo o rientrante (nel ontorno esterno) si risolve, come per il caso della torsione con l'introdu_ one di una funzione ausiliaria correttiva del tipo $r^k \cos(k\varphi)$, determinando come è detto più sopra per la torsione.

La detta funzione ha tutte infinite in P le sue prime derivate nelle arie direzioni; perciò risultano privi di influenza i due ultimi termini al econdo membro della seconda delle (20), i quali termini sono finiti.

Cenno sui punti angolosi in un contorno interno per sezioni a connessione multipla.

Nei punti angolosi qui specificati *non* si può far uso di funzioni de- ipo $r^k \cos(k\varphi)$ per k *non* intero. Infatti in tali casi la nota polidromia lelle siffatte funzioni provoca l'inconveniente ben noto: si possono trac- iare nella sezione dei circuiti chiusi racchiudenti il polo di una (o più) li siffatte funzioni: percorrendo uno di tali circuiti, si ritorna al punto di partenza con un valore di Φ_1 diverso da quello iniziale.

Perciò per studiare questi casi occorrono altri artifizî: per es. si pos- sono per approssimazione raccordare i lati dell'angolo in prossimità del vertice con un archetto di piccolissimo raggio di curvatura. Ciò corrisponde ad una pratica costruttiva sovente seguita per i contorni interni, ed anche con ciò si può tener conto dello snervamento che in una piccolissima zona adiacente al vertice di un angolo rientrante si produce nel materiale per effetto della tensione infinita producentesi nel detto vertice.

Operato il raccordo, si possono stabilire delle condizioni geometrico-ana- litiche, a cui debbono essere assoggettate le funzioni Φ o Φ_1, in prossimità del detto vertice, e tenendo conto del raggio di curvatura dell'archetto di raccordo.

Ci riserviamo di illustrare in un prossimo lavoro il relativo procedi- mento qui ora soltanto accennato.

Istituto di Scienza delle Costruzioni — R. Università di Napoli. — 5 febbraio 1937-XV°.

Statistica delle variazioni di stato

Nota del socio corrispondente **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 6 febbraio 1937 - XV)

Sunto. — L' A. prosegue un ciclo di ricerche statistiche già iniziate in questi Rendiconti: tratta del caso di una collettività — a numero fisso di elementi — nella quale avvengono scambi fra gli elementi, o se si vuole, fra le modalità di un certo carattere posseduto in diversa misura agli elementi stessi.

§ 1. *Premesse.*

1. In questa Nota proseguiamo, collegandole, alcune ricerche di Statistica Matematica, esposte in questi Rendiconti [1]). Ma, mentre sinora ci rivolgevamo — come campo di applicazione — quasi esclusivamente a problemi di demografia, dovremo qui esplicitamente richiamare l'attenzione sul fatto che queste nuove ricerche hanno attinenza sia a quistioni di fisica classica (quali la teoria cinetica dei gas), sia quistioni di fisica dell'atomo (emissione etc.) sia a quistioni fisico-chimico, oltre si intende a problemi e di demografia e di economia: lo schema matematico qui svolto è a tutti essi senz' altro applicabile.

Premettiamo che un punto fondamentale delle nostre ricerche è il passaggio da una collettività di individui, considerati come elementi di primo ordine, ad una collettività di loro coppie, considerate queste coppie quali elementi di secondo ordine. Tale passaggio può essere tanto effettuato quale accoppiamento puro e semplice, oppure effettuato come trasferimento dello stesso individuo da una classe all'altra: quanto come coppia di variabili mutuamente casuali.

È prevalentemente sulla seconda accezione che noi fermeremo l'indagine.

I problemi che in tal guisa esamineremo, sotto la veste di trasferimento di un individuo da una classe all'altra, si possono ridurre a tre fondamentali:

I Problema. Caratterizzare, statisticamente, i passaggi che avvengono in un certo intervallo di tempo: legge dei passaggi di stato.

II Problema. Caratterizzare le « configurazioni statistiche » (distribuzione degli elementi nelle diverse classi) *che risultano stabili rispetto ad*

[1]) Cfr. G. Andreoli, Questi Rendiconti anni 1934, 1935, 1936; *note varie di statistica.*

na assegnata legge dei passaggi, e reciprocamente, quelle leggi di passaggio he non alterano una configurazione statistica assegnata [1]).

III Problema. Esistono e come si esprimono eventuali proprietà ruppali delle leggi di passaggio? Cioè: se è data una legge di passaggio, on essa si passa da una prima cfg. ad una seconda; se è data una seconda egge di passaggio che applicata alla seconda configurazione conduce ad una erza, occorre ricercare sotto quali condizioni esiste (e come si costruisce) n' altra legge che ci permetta di passare direttamente dalla prima alla erza configurazione.

Sarà bene rispondere — sin dall'inizio, precorrendo gli sviluppi — a tali problemi. E diremo precisamente che:

I. Le leggi di passaggio sono collegate a matrici di probabilità; cioè a matrici aventi gli elementi positivi e minori dell' unità ed aventi l'unità come somma di ciascuna linea.

II. Le configurazioni statistiche vanno rappresentate in uno spazio di fase: e le matrici di passaggio dànno particolari trasformazioni affini di questo spazio.

III. Valgono proprietà gruppali (almeno nel caso che non vi siano fenomeni ereditari) espressi proprio dal prodotto delle matrici.

IV. Esiste *sempre* almeno *una* configurazione stabile (e nel caso generico una sola). Non esistono (nel caso generico) cicli stabili.

V. Le successive configurazioni dedotte l'una dall'altra mediante una legge fissata, *tendono sempre* (nel caso generico) ad una configurazione limite, che è quella stabile.

Possono tendervi in vario modo; fra l'altro attraverso oscillazioni cicliche con un certo smorzamento nel numero di componenti di ogni classe. (In tal modo può venire presentato il fenomeno o come ciclico — se lo smorzamento è vicinissimo all'unità — o come decisamente ascendente — se il ciclo è lungo ed il fattore di smorzamento non molto vicino all'unità).

Affiora in tal modo l'analogia con formazioni e concetti simili all'entropia.

IV. Problema. Partendo da una configurazione e da una legge assegnate, determinare quello che avviene dopo un tempo arbitrariamente grande; determinare cioè se la configurazione finale tende ad una configurazione limite, ovviamente stabile, oppure oscilla percorrendo alternativamente configurazioni non stabili ma dedotte successivamente l'una dall'altra e formante perciò un ciclo stabile nel suo complesso.

Per dare un'idea dell'importanza di tale problema diremo solo — (per parlare di problemi di statistica demografica) che un ciclo di tale tipo se

---

[1]) E subordinatamente II a, se e quando esistano cicli stabili di configurazioni, cioè successioni cicliche di configurazioni dedotte ciclicamente e successivamente sempre nello stesso ordine l'una dall'altra.

riscontrato nella composizione per età di una popolazione, può spiegare fenomeni demografici all'ordine del giorno.

2. L'impostazione dei tre problemi è collegata, ovviamente, al primo di essi. La collettività in esame sia *(K)*; il numero dei suoi individui sia K; ed in base alle modalità di un certo carattere essa si distribuisca in classi

$$\dots (k_n), (k_{n+1}), (k_{n+2}) \dots$$

Considereremo sempre i rapporti — cioè le frequenze —

$$k_n = \frac{K_n}{K} \quad ; \quad \Sigma k_n = 1 \quad ; \quad 1 \geq k_n \geq 0$$

assumendo perciò in tal caso per convenzione comoda semplicemente K eguale all'unità.

Qui si presentano subito tre tipi possibili di configurazioni;

I. Distribuzione in un numero illimitato di classi, e con maggiore precisione:

I*a*. illimitato nei due sensi, sì da aversi

$$\dots (K_{-2}), (K_{-1}), (K_0), (K_1), (K_2) \dots$$

I*b*. illimitata in un verso solo, sì da aversi

$$(K_0), (K_1), \dots$$

Tale è il caso, ad esempio, di distribuzione per velocità di particelle.

II. Distribuzione in un numero *limitato* di classi, avendo la classificazione carattere ciclico:

$$(K_0), (K_1), (K_2), \dots (K_{n-1}); (K_n) \equiv (K_0).$$

Questo sarebbe il caso, ad esempio di un fenomeno statistico che riguardasse giorni della settimana, mesi dell'anno, stagioni etc.

III. Distribuzione in un numero *limitato* di classi, *non* avendo però la classificazione carattere ciclico; questo sarebbe il caso, ad esempio, di una popolazione divisa in classe per reddito etc. etc.

Premesso ciò, vi saranno da considerare le frequenze (o le probabilità, a secondo dei casi) di passaggio, *nell'intervallo di tempo*, da una classe all'altra.

Se dalla classe (k_r) un'aliquota è passata alla classe (K_s), quest'aliquota la indicheremo con $a_{r,s}$; sicchè gli elementi che hanno effettuato il passaggio ora detto saranno $k_r \cdot a_{r,s}$.

Questo implica che:

$$\sum_s a_{r,s} = 1,$$

d infatti tutti gli elementi che appartenevano alla classe (K_r) nella con-
gurazione originaria si saranno diffusi in tutte le altre, non esclusa quella
i origine: e quindi la somma delle aliquote fatta in quel modo deve dare
unità.

Reciprocamente nella configurazione finale alla classe (K'_s) sono con-
uiti elementi da tutte le classi; la somma delle aliquote dovrà — se ese-
uita in tale modo — dare ancora l'unità, avendosi dunque:

$$\sum_r a'_{r,s} = 1.$$

)ve le α'_{rs} sono i coefficienti che dànno il passaggio dalla (K') alla K.

Dalla configurazione originaria

$$\ldots (K_{n-1}), (K_n), (K_{n+1}) \ldots$$

si passerà dunque a quella finale mediante le formule — di cui la prima
simbolica, in quanto il segno di somma rappresenta la somma logica ope-
rando su classi

$$\begin{cases} (K'_m) = \sum_r \alpha_{rm} (K_r) \\ k'_m = \sum_r \alpha_{rm} \; k_r \end{cases}$$

mentre da quella finale si ritorna a quella iniziale mediante le formule
analoghe — salvo a fissare il significato delle α'

$$\begin{cases} (K_n) = \sum_s \alpha'_{ns} (K'_s) \\ k'_n = \sum_s \alpha'_{ns} \; k'_s \end{cases}$$

3. Per definire effettivamente tale passaggio e per fissare quali rela-
zioni leghino le α alle α', è bene fare le considerazioni seguenti, svolte nel-
l'ipotesi della classificazione finita.

Della classe (K_1) avente la modalità ω_1 del carattere Ω, restino, con-
servando la modalità ω_1, un numero k_{11}; cambino la modalità ω_1 in ω_2, un
numero k_{12} etc.; sicchè

$$k_{11} + k_{12} + \ldots k_{1n} = k_1.$$

Similmente dalla classe (K_2) avente la modalità ω_2 di Ω, passino alla modalità ω_1, un numero k_{21}, e così via avendosi ancora

$$k_{21} + k_{22} + \dots k_{2n} = k_2;$$

e così per gli altri passaggi.

Si ha allora un quadro

$$(K) \equiv \begin{array}{c|cccc} & (K'_1) & (K'_2) & \dots & (K'_n) \\ \hline (K_1) & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ (K_2) & k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (K_n) & k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{array} \equiv (K') \qquad (1)$$

in esso la freccia sta a significare passaggio da (K) a (K').

Tale quadro esprime, alla casella di posto (r, s) incrocio della linea r-sima con la colonna s-sima quanti elementi k_{rs} della classe r-sima della configurazione iniziale (K) sono passati a far parte della classe s-sima della nuova configurazione finale (K'): cioè quanti elementi hanno perduto la modalità ω_r del carattere Ω ed hanno acquistata la modalità ω_s.

Pertanto tutti i numeri in linea esprimeranno *tutti e soli* gli elementi della classe di provenienza; e pertanto, per la linea r-sima la somma degli elementi, ci dirà quanti elementi conteneva (K_r):

$$k_r = \sum_{\rho} k_{r\rho};$$

invece tutti i numeri in colonna esprimeranno *tutti e soli* gli elementi della classe di destinazione; e pertanto per la colonna s-esima, avremo analogamente per (K'_s):

$$k'_s = \sum_{\sigma} k_{\sigma s};$$

essendo poi

$$\Sigma k_r = \Sigma k'_s = 1.$$

olendo considerare le aliquote di passaggio, dovremo scrivere

$$k'_s = \sum_\sigma k_{\sigma s} = \sum_\sigma \frac{k_{\sigma s}}{k_\sigma} \cdot k_\sigma = \sum a_{\sigma s} \cdot k_\sigma$$

ssendo:

$$\omega_{\sigma s} = \frac{k_{\sigma s}}{k_\sigma} = \frac{k_\sigma}{\sum_\rho k_{\sigma \rho}} .$$

Con tale convenzione, il passaggio dalla configurazione originaria a quella finale è ottenuto mediante la matrice:

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

che esprimerà la « *legge di passaggio di stato* » caratterizzata dall'avere.

I. *Tutti i suoi elementi positivi e minori dell'unità.*

II. *La somma, per ciascuna linea, degli elementi in essa contenuti, è limitata.*

Se vogliamo passare dalla configurazione (K') alla (K), tale passaggio sarà, per motivi analoghi, dato dalla matrice A' formata con le a'_{rs}. Quale sarà la relazione che lega le due matrici A ed A'?

Dovremo riscrivere il quadro

	(K)		
	(K_1)	(K_2)	
(K'_1)	k'_{11}	k'_{12}	.....
(K'_2)	k'_{21}	k'_{22}	.....
⋮			
	.....	.....	.....

dove la k'_{rs} dà il numero degli elementi che, avendo nella configurazione (K') il carattere ω_r, hanno nella (K) il carattere ω_s: in sostanza tale numero di elementi lo troviamo già scritto nella tabella precedente come k_{rs}. Perciò:

$$k'_{rs} = k_{rs}$$

e la seconda tabella si deduce dalla prima (e reciprocamente) scambian linee e colonne fra loro.

Ma adesso si avrà, per analogia:

$$\sum_{\sigma} k'_{s\sigma} = k'_{s}$$

che coincide proprio con la definizione:

$$\sum_{\sigma} k_{\sigma s} = k'_{s}$$

già data.

Ed avremo inoltre

$$k_{r} = \sum_{\rho} k'_{\rho r} = \sum_{\rho} k_{r\rho},$$

da cui segue:

$$k_{r} = \sum_{\rho} \frac{k'_{\rho r}}{k'_{\rho}} \cdot k'_{\rho} = \sum a'_{\rho r} \cdot k'_{\rho}$$

essendo ora

$$a'_{\rho r} = \frac{k'_{\rho r}}{k'_{\rho}} = \frac{k'_{\rho r}}{\sum_{\sigma} k'_{\rho\sigma}}$$

e questa per le relazioni intercedenti fra le k e k' diventa semplicemen

$$a'_{\rho r} = \frac{k_{r\rho}}{\sum_{\sigma} k_{\sigma\rho}}.$$

Ed ora è immediato esprimere la $a'_{\rho r}$ in funzione delle $a_{\sigma s}$: infatti

$$a'_{\rho r} = \frac{k_{r\rho}}{\sum_{\sigma} k_{\sigma\rho}} = \frac{\frac{k_{r\rho}}{k_{r}} k_{r}}{\sum_{\sigma} \frac{k_{\sigma\rho}}{k_{\sigma}} \cdot k_{\sigma}} = \frac{a_{r\rho} k_{r}}{\sum_{\sigma} a_{\sigma\rho} \cdot k_{\sigma}}.$$

Questo significa che le a' *non* si possono esprimere *soltanto* per le a, m occorrono anche le k.

È facile costruire degli esempi numerici, e verificare in tal modo che data una configurazione statistica (K) originaria, dedotta da essa una f

ale (K') per mezzo di una legge A, la legge inversa di passaggio da (K') (K) dipende da (K) — o da da (K') se si vuole.

In altre parole;

Se mediante una legge si passa da una configurazione iniziale alla corrispondente finale, e con la stessa legge si passa da un' altra configurazione iniziale ad un' altra finale; il passaggio dalle finali alle corrispondenti iniziali si effettua, in generale, con due leggi diverse fra loro.

Vogliamo adesso esaminare le eventuali proprietà gruppali delle leggi di passaggio.

Supporremo di *non* trovarci in presenza di fenomenti aventi carattere di ereditarietà. Ciò significa che l'elemento che sia passato dalla classe (K_r) della prima configurazione (K) alla classe (K'_s) della seconda ha perduto tutta la caratteristica ω_r ed ha acquistato quella ω_s; sicchè in un altro passaggio si comporta esclusivamente in base a questa. (Escludiamo anche, in queste prime ricerche, il caso di passaggi vincolati da principii di esclusione — principii cioè, per i quali in ogni classe, vi sieno solo possibilità limitate di passaggio, nel senso che

$$k_1 \leq h_1 \quad ; \quad k_2 \leq h_2 \quad ; \quad k_3 \leq h_3 \cdots$$

e che gli elementi superflui di una classe si debbano riversare nella successiva).

Seguiamo allora, ciò che avviene: La prima legge sia A; cioè dei k_r elementi di K_r, ne sono passati $k_{r1} = a_{r1} k_r$ a formare (K'_1) e così via.

Ora dei k'_s elementi di K'_s, ne passeranno $k'_{s1} = b_{s1} k_s$ a formare (K''_1) e così via.

Se la selezione operata da B *agisce* a caso, con la legge della probabilità composta, ciò significa che spezzato K'_s in due o più porzioni, ciascuna di queste darà un parziale contributo (che risulterà proporzionale al numero dei propri elementi) a formare le k'.

E siccome

$$(K'_s) \equiv a_{1s}(K_1) + a_{2s}(K_2) + \cdots + a_{ns}(K_n)$$

sarà anche:

$$(K'_{st}) \equiv b_{st}[a_{1s}(K_1) + \ldots + a_{ns}(K_n)]$$

e quindi

$$(K''_t) \equiv (K'_{1t}) + (K'_{2t}) + \ldots (K'_{nt})$$

risulta dato da

$$b_{1t}[a_{11}(K_1) + \ldots + a_{n1}(K_n)] +$$
$$b_{2t}[a_{12}(K_2) + \ldots + a_{n2}(K_n)] +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{1t}(K_1) + c_{2t}(K_2) + \ldots + c_{nt}(K_t),$$

ove

$$c_{st} = a_{s1}b_{1t} + a_{s2}b_{2t} + \ldots + a_{sn}b_{nt} = \sum_p a_{sp}b_{pt}.$$

Dunque:

Il prodotto — cioè l'applicazione successiva — di due leggi di passaggio è ancora una legge di passaggio. La sua matrice è data precisamente dal prodotto (inteso in senso matematico) *delle due matrici di passaggio.* Ed in effetti questo si vede tanto attraverso la legge delle probabilità composte quanto attraverso la considerazione che due passaggi consecutivi conducono ad uno stato finale che si deve poter dedurre direttamente da quello iniziale attraverso lo stesso tipo di procedimento.

In altri termini da:

$$k'_m = \sum_r a_{rm} \cdot k_r$$
$$k''_p = \sum_\rho b_{\rho p} k'_\rho$$

si trae

$$k''_p = \sum_q c_{pq} k_p \quad ; \quad c_{pq} = \sum_\rho a_{p\rho} b_{\rho q};$$

e si verificherebbero anche essere soddisfatte le due condizioni cui soddisfano le matrici di passaggio.

4. Dovremo qui introdurre due tipi speciali di queste matrici di probabilità.

Ammettiamo, per il primo tipo speciale, *che* **non** *vi sieno passaggi o salti a distanza*; e che quindi per passare da una modalità del carattere ad un'altra, l'elemento debba percorrere *tutti* gli stadi intermedi; quindi potremo esaminare il caso — più semplice — che: *i passaggi di stato (in un intervallo abbastanza piccolo di tempo) avvengano soltanto* da una classe a sè stessa, o alla precedente o alla seguente.

Le matrici di probabilità si presentano allora in una forma particolarmente semplice: le diremo « *elementari* »: la trasformazione da esse indotta si propaga via via in tutta la configurazione.

Esaminiamola, tenendo presenti i tre casi fondamentali delle classificazioni.

Se la classificazione è illimitata, essa matrice si presenterà sotto la orma:

$$\begin{Vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots 0 & 0 & \alpha_{r-1,r-2} & \alpha_{r-1,r-1} & \alpha_{r-1,r} & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \\ \cdots 0 & 0 & 0 & \alpha_{r,r-1} & \alpha_{r,r} & \alpha_{r,r+1} & 0 & 0 & 0 \cdots \\ \cdots 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1,r} & \alpha_{r+1,r+1} & \alpha_{r+1,r+2} & 0 & 0 \cdots \\ \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

Se la classificazione è finita e ciclica — per esempio su cinque classi, si avrà

$$\begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & 0 & 0 & \alpha_{04} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{40} & 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}$$

mentre se non è ciclica avrà la forma

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{Vmatrix}$$

Ammettiamo, come seconda ipotesi, *che le aliquote di passaggio sieno indipendenti dalla classe cui si applicano* (e per semplicità applichiamo questa ipotesi solo al caso di matrici elementari) diremo tali matrici « isotrope ».

Con la classificazione infinita la matrice assume la forma

$$\begin{Vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots 0 & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 \cdots \\ \cdots 0 & 0 & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1$$

con quella finita e ciclica

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_{-1} \\ \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_{-1} & \alpha_0 \end{vmatrix}$$

ed infine con quella non ciclica:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_{-1} & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & \\ 0 & 0 & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{-1} & \alpha_0 + \alpha_1 & \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1$$

Qui α_{-1} significa aliquota di passaggio alla classe precedente; α_{+1} alla classe seguente, α_0 di permanenza nella classe; e per la matrice finita non ciclica — che abbiamo visto essere simmetrica — $\alpha_{-1} = \alpha_1 = \alpha$.

È facile rendersi conto del perchè ed il primo e l'ultimo termine della diagonale principale sono diversi dagli altri. Anzitutto vi è il fatto che, in linea, la somma deve dare l'unità. Ma se si riflette che α_{-1} significa passaggio ad una classe precedente e che questa per la prima non vi è, si spiega benissimo un «ripiegamento» della classe su se stessa; cioè gli elementi di essa, in numero di $k_0\alpha_{-1}$ che dovrebbe retrocedere non possono certamente salire di classe; e quindi restano in quella più bassa; dunque l'aliquota α_0 degli elementi invarianti in (K_0) va aumentata di α_{-1}, aliquota di quelli che dovrebbero discendere. Ed analoga considerazione va fatta per l'ultima classe.

Una osservazione cade quì a proposito. Se si considera la configurazione iniziale e quella finale, si possono definire (si potrebbe farlo anche nel caso di matrici non elementari e non isotrope) altre tre probabilità:

1.° quella $\tilde{\omega}_{-1}$ che ad un elemento generico della collettività spetta come probobilità di passaggio alla classe precedente

2.° quella $\tilde{\omega}_0$ che ad un elemento generico spetta come probabilità di permanenza nella sua classe

3.° quella $\tilde{\omega}_1$ che spetta per passaggio alla classe seguente.

Se la configurazione iniziale è assegnata, e nel caso di classificazione

finita ed in quella ciclica si vede facilmente, che:

$$\tilde{\omega}_{-1} = \frac{\sum_r k_r \alpha_{-1}}{\sum_r k_r} = \alpha_{-1}$$

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{\sum_r k_r \alpha_0}{\sum_r k_r} = \alpha_0$$

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\sum_r k_r \alpha_1}{\sum_r k_r} = \alpha_1 .$$

nvece per le matrici corrispondenti a classificazione finita non ciclica, i avrà:

$$\tilde{\omega}_{-1} = \alpha_{-1} k_1 + \alpha_{-1} k_2 + \alpha_{-1} k_3 + \alpha_{-1} k_4 = \alpha_{-1} - \alpha_{-1} k_0$$

ssendo

$$\sum k_s = 1 ;$$

; così

$$\tilde{\omega}_0 = (\alpha_0 + \alpha_{-1}) k_0 + \alpha_0 k_1 + \alpha_0 k_2 + \alpha_0 k_3 + (\alpha_0 + \alpha_1) k_4 = \alpha_0 + \alpha_{-1} k_1 + \alpha_1 k_4$$

$$\tilde{\omega}_{+1} = \alpha_1 k_0 + \alpha_1 k_1 + \alpha_1 k_2 + \alpha_1 k_3 = \alpha_1 - \alpha_1 k_4 .$$

In generale si troverà, per una matrice finita, non ciclica:

$$\tilde{\omega}_{-1} = \alpha_{-1} - \alpha_{-1} k_0 \quad ; \quad \tilde{\omega}_0 = \alpha_0 + \alpha_{-1} k_0 + \alpha_1 k_n \quad ; \quad \tilde{\omega}_1 = \alpha_1 - \alpha_1 k_n .$$

Cioè: per le matrici finite non cicliche vi è differenza fra probabilità di passaggio rispetto alle classi e probabilità complessiva di passaggio analogo. Queste ultime risultano collegate alla composizione originaria della configurazione.

Studiamo ora un esempio concreto. Si abbia un certo complesso di elementi diviso in *due* classi: supponiamo di trovarci nel caso isotropo, e sia α_1 la probabilità di permanere nella classe, α_2 quella di cambiare classe; osserviamo che *due* classi si possono sempre pensare come appartenenti al caso ciclico.

La configurazione originale sia $(K) \equiv (K_1) + (K_2) = k_1 + k_2 = 1$ mentre

$$P \equiv \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{Vmatrix} \quad ; \quad \tilde{\omega}_1 = \alpha_1 \quad \tilde{\omega}_2 = \alpha_2 .$$

Per il II problema dobbiamo ricercare anzitutto se esistono configurazioni stabili — il che implica: $(K) \equiv (K')$ e quindi $k'_1 = k_1 \, ; k'_2 = k_2$.

Messo in equazione si avrà:

$$k_1 - k'_1 = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2$$
$$k_2 - k'_2 = \alpha_2 k_1 + \alpha_1 k_2$$

dalla quale, per sottrazione termine a termine si trae:

$$(K_1 - K_2) = (k_1 - k_2) = (\alpha_1 - \alpha_2)(k_1 - k_2).$$

Questa ammette come soluzione $0 . k_1 = k_2$ ed α_1 , α_2 qualunque oppure $1 = \alpha_1 - \alpha_2$ e k_1 , k_2 qualunque.

Nella prima soluzione $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$; le due classi sono egualmente nunumerose e, qualunque sia la legge isotropa di scambio (cioè α_1 o α_2), tanti elementi passano dalla prima alla seconda quanti dalla seconda alla prima. Vi è dunque effettivamente equilibrio.

Nella seconda soluzione essendo $1 = \alpha_1 - \alpha_2$, per i vincoli imposti alle α quali probabilità, deve essere $\alpha_1 = 1 , \alpha_2 = 0$; cioè *non* vi è trasferimento di classe. Ed allora la configurazione qualunque rimane invariata perchè addirittura non si spostano elementi da una classe all' altra.

Passiamo al problema subordinato. Vi possono essere cicli stabili di configurazioni successive? È possibile, cioè, avere n configurazioni $(K) , (K') , (K'') \ldots K^{(n-1)} , K^{(n)} \equiv K \ldots$ tali che ciascuna di esse sia dedotta dalla precedente per mezzo della matrice di probabilità P, l' ultima coincidendo con la prima. In tal caso: dovrà essere — in analogia a quanto abbiamo detto poc' anzi:

$$k'_1 - k'_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)(k_1 - k_2)$$
$$k''_1 - k''_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)(k'_1 - k'_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$k_1^{(n)} - k_2^{(n)} = k_1 - k_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)(k_1^{(n-1)} - k_2^{(n-1)},$$

il che conduce subito a

$$k_1^{(n)} - k_2^{(n)} = (\alpha_1 - \alpha_2)^n (k_1 - k_2).$$

Dunque dovrà essere 0:

$$k_1^{(r)} - k_2^{(r)} = 0$$

che porta alla configurazione « indifferente » con egual numero nelle due classi, la quale è già stabile come abbiamo visto, e quindi a

$$(K) = (K') = (K'') \ldots ;$$

oppure dovrà essere

$$1 = (\alpha_1 - \alpha_2)^n.$$

la $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 1$ raggiungendosi l'eguaglianza solo per $\alpha_1 \quad 1, \alpha_2 \quad 0$ op-
ure $\alpha_1 \quad 0, \alpha_2 = 1$; ed avendosi rispettivamente $\alpha_1 - \alpha_2 = 1$; $\alpha_1 - \alpha_2 \quad -1$.

Nel primo caso si ricade su l'altra configurazione stabile già esaminata ualunque sia $n -$; nel secondo caso l'eguaglianza è verificata solo per n pari; ed il ciclo risulta composto da

$$(K') \equiv (k_1, k_2) \quad ; \quad (K') \equiv (k_2, k_1) \quad ; \quad (K'') = (K) \ldots ;$$

ciò che era da attendersi, essendo la matrice in questo caso data dei

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

il che ci dice *non* esservi alcun elemento che permane invariato, dovendo ogni singolo elemento cambiare di classe.

Cioè: per una matrice generica, vi è *soltanto* una configurazione stabile; quella che ha egual numero di elementi nelle classi.

Per una configurazione generica vi è solo la matrice che non dà scambio, per cui quella configurazione è stabile; e vi è solo la matrice che non lascia invariato nessun elemento, rispetto alla quale quella configurazione appartiene ad un ciclo stabile composto da due configurazioni: la data cioè, e quella a classi scambiate.

Questa è dunque la soluzione completa del problema VI, nel caso in esame.

Passiamo al problema III: si ha sempre, come prima:

$$k_1^{(r)} - k_2^{(r)} = (\alpha_1 - \alpha_2)\,(k_1^{(r-1)} - k_2^{(r-1)})$$

e di conseguenza

$$k_1^{(r+1)} - k_2^{(r+1)} = (\alpha_1 - \alpha_2)^r\,(k_1 - k_2).$$

Al divergere di r (sempre che α_1, α_2 sieno diversi da 0, 1, ciò — che è lecito, avendo già esaminato le configurazioni stabili ed i cicli stabili) la $(\alpha_1 - \alpha_2)^r$ tenderà a 0; e dunque $k_0^{(r+1)} - k_1^{(r+1)}$ tenderà a zero.

Dunque la $K^{(r)}$ tenderà proprio alla configurazione « indifferente »; e se $\alpha_1 > \alpha_2$, le successive potenze della loro differenza $\alpha_1 - \alpha_2$ conservano *sempre* segno positivo, sicchè $k_1^{(r+1)} - k_2^{(r+1)}$ e $k_1 - k_2$ hanno sempre lo stesso segno. Ciò interpretato ci dice che se le permanenze prevalgono sulle variazioni — nella matrice statistica — allora le due classi tendono ad aver numero di elementi eguali, la maggiore decrescendo, la minore crescendo ed ogni stadio conservando lo stesso ordine fra le due classi. Se invece $\alpha_1 < \alpha_2$, le successive potenze di $\alpha_1 - \alpha_2$ sono alternativamente positive e negative e così anche le differenze $k_1^{(r)} - k_2^{(r)}$; in tal caso la classe maggiore è alternativa-

mente la prima e la seconda; sempre però tendendo alla configurazione indifferente (quella con egual numero di elementi nelle classi).

Nel caso generale, attraverso le matrici, si può dare una risposta teorica completa ai tre problemi posti in principio.

Anzitutto le successive configurazioni assunte dalla collettività esaminata, si deducono l'una dall'altra applicando a quella che precede la matrice P per ottenere quella che segue. Da questo fatto si deduce che la n-sima configurazione successiva ad una assegnata si deduce da questa con l'applicazione ad essa della matrice P^n, potenza n-esima della data P. Pertanto le configurazioni stabili rispetto ad una certa legge di probabilità sono quelle per le quali $(K) \equiv (K')$ e quindi $k_r = k'_r$; sicchè dovrà aversi, ad esempio, nel caso di classificazione finita:

$$\left\{\begin{array}{l} (\alpha_{11}-1)k_1 + \alpha_{21}k_1 + \ldots + \alpha_{n1}k_n = 0 \\ \alpha_{12}k_1 + (\alpha_{22}-1)k_2 + \alpha_{n2}k_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}k_n + (\alpha_{nn}-1)k_n = 0 \end{array}\right. \qquad (3)$$

Dunque, se il determinante

$$P^* = \left|\begin{array}{cccc} \alpha_{11}-1 & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-1 & \ldots & \alpha_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & & \alpha_{nn}-1 \end{array}\right|$$

risulta nullo, vi potranno essere configurazioni stabili, se no esse non vi saranno.

Ma, per il fatto che in linea la somma delle α dà l'unità, si deduce che in questo determinante la somma di tutte le colonne alla prima cumulla questa prima colonna; e che quindi *il determinante è effettivamente nullo.*

Dunque — in conformità dell'intuizione vi sono effettivamente configurazioni stabili.

Rinviando il calcolo effettivo delle configurazioni stabili (che si deve eseguire tenendo conto della matrice del determinante scritto, anzi della sua caratteristica) la teoria delle equazioni lineari ci dice che se la caratteristica è proprio $n-1$, allora vi sarebbe una semplice infinità (dipendente da un parametro) di soluzioni delle (3); ma siccome

$$k_0 + k_1 + \ldots + k_n = 1$$

di queste è accettabile *una* sola [1]); e per lo stesso motivo se la caratte-

[1]) E tanto per fissare *una* delle forme sotto le quali si presenta, diremo subito che i numeri k_r sono ordinatamente dati dai complementi algebrici degli elementi di una colonna divisi per la loro somma. Vedremo poi un esempio.

istica fosse $(n-r)$, vi sarebbero r soluzioni linearmente indipendenti, le quali a causa della relazione fra le K si ottengono simbolicamente da

$$\begin{cases} \lambda_0(K) + \lambda(H) + \ldots + \lambda_r(M) \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_r = 1 \qquad \lambda_1 > 0 \end{cases}$$

cioè si ottengono con un processo di media ponderata dalle singole soluzioni trovate.

In completa anologia con la ricerca delle soluzioni stabili si tratta quella dei cicli stabili: basta ripetere (come abbiamo fatto per due classi) le stesse considerazioni per la potenza P^n. Ogni configurazione appartenente ad un ciclo stabile soddisfa alla

$$P^n . (K) = (K'),$$

ovvero è stabile per la potenza n-sima della matrice data.

Quindi si effettua questa ricerca, scartando quelle configurazioni che già appartengono a cicli di ordine ν (con ν divisore di n) che già figurano.

Rispetto a questi cicli, possiamo osservare che la più generale soluzione si otterrà con

$$\lambda_1 K'_0 + \lambda_2 K'', + \ldots + \lambda_n K^{(n)} ; \lambda_0 K' + \lambda_1 K''' + \ldots \lambda_n K' ; \ldots ; \lambda_1 K^{(n)} + \lambda_2 K_0 + \ldots + \lambda_n K^{(n-r}$$

se $K', K'', \ldots K^{(n)}$ formano già un ciclo stabile, essendo poi

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

E se poi la caratteristica della matrice $(P^n)^x$ è $n-r$, allora si avranno ulteriori combinazioni lineari con altri r coefficienti arbitrari, di r soluzioni fondamentali linearmente indipendenti.

Una semplice interpretazione geometrica iperspaziale ci permette subito di far vedere che — *per una legge di passaggio generica* (cioè non soddisfacente a speciali vincoli) — *effettivamente gli stadi successivi percorsi da una configurazione iniziale, tendono sempre ad una configurazione limite, che è quella stabile; ed in generale mancano i cicli stabili.*

Può tuttavia presentarsi proprio il caso di pulsazioni nel numero dei componenti che hanno la modalità ω_r del carattere Ω; ma queste pulsazioni vanno — in generale — sempre più attenuandosi.

Cominciamo dall'esporre quanto avviene per un carattere che presenti tre modalità: l'interpretazione sarà allora facile, perchè lo spazio rappresentativo di ogni configurazione è proprio lo spazio a tre dimensioni, e quindi tutto si rende visibile.

Lo spazio che rappresenta le configurazioni, lo diremo « *spazio di configurazione* » esso è diverso dallo spazio di fase.

Infatti per un collettista di N individui, lo spazio di fase rappresenta

tutta la configurazione con *un* solo punto. E precisamente, si hanno N coordinate, le quali possono assumere ciascuna tutti i valori numerici fissati al carattere Ω, cioè $\omega_1 \ldots \omega_r$. Dunque tutte le possibili collettività di N elementi, nello spazio di fase sono rappresentate dai nodi del reticolo a facce parallele, che passano per i punti $\omega_1 \ldots \omega_r$ degli N assi; e ciascun elemento della collettività rappresenta una delle coordinate.

Nello spazio di configurazione vi sono invece soltanto n dimensioni, corrispondenti alle n classi secondo le quali è diviso Ω; e supposta la collettività ridotta a misura totale unitaria, si avrà che l'n-sima coordinata — corrispondente all'n-sima classe è $k_r = \frac{K_r}{K}$.

Dunque tutte le possibili collettività di K individui sono rappresentate dai punti di un reticolo ad n coordinate razionali, frazioni a denominatore K, giacenti nell'iperpiano

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1.$$

Noi riportiamo dunque una configurazione come punto nello spazio di cui gli assi sono OK_1, OK_2, OK_3: alla cfg. $(K) \equiv (K_1) + (K_2) + (K_3)$ corrisponde al punto K^* di coordinate k_1, k_2, k_3.

Siccome $k_1 + k_2 + k_3 = 1$, ciò significa che i punti K si trovano soltanto su quel piano π passante per gli estremi U_1, U_2, U_3 dei segmenti unitari lungo i semiassi positivi uscenti dall'origine.

Da K si passa a K' mediante la matrice

$$A \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Questa matrice (il cui determinante abbia valore α) fissa un'affinità in tutto lo spazio di configurazione; e farà scorrere, deformandolo a sua volta in modo affine, il piano π su sè stesso.

D'altro canto se noi consideriamo il punto U_1 come rappresentante la configurazione $(1, 0, 0)$, ad esso corrisponde per la A, la configurazione U'_1 data da (a_{11}, a_{21}, a_{31}); di cui tutte le coordinate sono *minori* dell'unità e positive. Similmente ad $U_2 \equiv (0, 1, 0)$ corrisponde $U'_2 \equiv (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ ed ad $U_3 \equiv (0, 0, 1)$ la $U'_3 \equiv (a_{13}, a_{23}, a_{33})$.

Dunque, per la A, al triangolo $T \equiv U_1\, U_2\, U_3$ del piano π corrisponderà il triangolo $T' \equiv U'_1\, U'_2\, U'_3$ dello stesso piano, *tutto interno al primitivo* (e di area minore, nel rapporto α); e riapplicando la A, da T si passa a T'' anche esso contenuto in T' e di area minore nel rapporto α, e quindi di area di rapporto α^2 rispetto a T.

Con tale procedimento si viene precisamente a fissare un punto U^* in-

no a tutti questi triangoli, e che è precisamente il punto cui convergono multaneamente $U_1, U'_1, U''_1 \cdots ; U_2, U'_2, U''_2 \cdots ; U_3, U'_3, U''_3 \cdots$

Esso rappresenta la *sola* configurazione stabile.

Ricordiamo adesso che il rapporto dell'area di due triangoli è invante per trasformazioni affini.

Se si hanno dunque 3 configurazioni iniziali H, K, L formanti un triangolo Θ, applicando ad esse la trasformazione A, avremo altre tre configurazioni H', K', L', formanti un triangolo Θ' e sarà anche

$$\alpha = \frac{\Theta'}{\Theta} = \frac{\Theta''}{\Theta'} = \cdots$$

ove q è dato precisamente dal determinante [1]) di A cioè

$$\alpha = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} .$$

E pertanto anche le successioni

$$H, H', \ldots, H^{(n)} \ldots ; K, K', \ldots, K^{(n)}, \ldots ; L, L', \ldots, L^{(n)}, \ldots$$

endono al punto U.

Questo ci dice, appunto, che partendo da una qualsiasi configurazione niziale si arriva sempre a quella stabile come limite.

Ma c'è di più: la affinità sul piano π lascia fisso il punto U; quindi n generale i punti $K, K', K'', \ldots$ si potranno avvolgere a spirale oppure no attorno ad U^* avvicinandosi ad esso: ciò implica precisamente che vi possono essere delle pulsazioni con una certa periodicità nelle singole coordinate.

In altre parole, *ogni classe* K_r^{ν} *relativa ad una certa modalità del carattere, al variare di* ν *oscilla, smorzando le sue oscillazioni, attorno al valore* u_r^* della configurazione stabile.

Ne consegue che se l'avvolgimento non è rapido ma sibbene molto lento, mentre lo smorzamento è molto piccolo (vicino all'unità), a seconda del posto che si occupa nella successione potrà *sembrare* che vi sia decadenza

---

[1]) Si vede che effettivamente $|\alpha| < 1$; in quanto α rappresenta il sestuplo volume di una piramide avente un vertice in 0 e gli altri tre vertici nei punti U'_1, U'_2, U'_3 dianzi detti; ma questo triangolo di base è tutto interno a quello U_1, U_2, U_3 di cui l'analogo sestuplo volume è precisamente 1; dunque

$$|\alpha| < 1.$$

per certe classi a ridursi e per certe altre ad aumentare o reciprocamente, senza che ciò sia effettivamente vero.

(E questo può avere un significato nei problemi demografici).

Le condizioni di cui sopra vanno collegate a valori delle a molto piccoli, dovunque salvo che nella diagonale principale dove differiscono poco dall'unità.

Nel caso generale, le cose procedono egualmente. Si avrà un S_n come «spazio di configurazione»; le condizioni imposte alle k si traducono nel fatto che il punto rappresentativo si muove su uno spazio ad $(n-1)$ dimensioni (iperpiano) passante per gli estremi dei segmenti unitari uscenti dall'origine nel verso positivo, $U_1, \ldots U_n$; alla superficie del triangolo si sostituisce l'ipervolume dell'ipertriangolo $U_1 \ldots U_n$, ed al volume della piramide l'ipervolume della iperpiramide avente una dimensione di più e altro vertice in O. Il determinante α conserva *sempre* il suo significato di rapporto di ipervolumi di un gruppo di n configurazioni all'ipervolume delle n configurazioni corrispondenti e precedenti.

Ma due esempi chiariranno meglio quanto si è detto. Si abbia la configurazione iniziale K (0 ; 0,5 ; 0,5) e la matrice sia

$$A \equiv \begin{Vmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{Vmatrix}.$$

Sarà ovviamente

$$\begin{aligned} K' \equiv (&0\times 0{,}9+0{,}5\times 0{,}8+0{,}5\times 0{,}7\ ;\ 0\times 0{,}1+0{,}5\times 0+0{,}5\times 0{,}2\ ; \\ &0\times 0+0{,}5\times 0{,}2+0{,}5\times 0{,}1) \\ \equiv (&0{,}75\ ;\ 0{,}10\ ;\ 0{,}15). \end{aligned}$$

Si trova, procedendo in modo analogo, da K' la K'', da questa K''' etc., cioè:

$$\begin{aligned} K &\equiv (0 \quad ; 0{,}5 \quad ; 0{,}5) \\ K' &\equiv (0{,}75 \quad ; 0{,}10 \quad ; 0{,}15) \\ K'' &\equiv (0{,}860 \quad ; 0{,}105 \quad ; 0{,}035) \\ K''' &\equiv (0{,}8825 \ ; 0{,}0930 \ ; 0{,}0245) \\ K^{IV} &\equiv (0{,}88580 \ ; 0{,}09315 \ ; 0{,}02105). \end{aligned}$$

La configurazione stabile va calcolata tenendo conto delle equazioni omogenee:

$$\begin{cases} 0{,}9\ u_1 + 0{,}8\ u_2 + 0{,}7\ u_3 = u_1 \\ 0{,}1\ u_1 + 0{,}0\ u_2 + 0{,}2\ u_3 = u_2 \\ 0{,}0\ u_1 + 0{,}2\ u_2 + 0{,}1\ u_3 = u_3 \end{cases}.$$

E quindi occorre dalla A considerare la matrice delle prime due colonne,

po aver sottratto 1 alla diagonale principale; cioè

$$\begin{Vmatrix} -0,1 & 0,1 \\ 0,8 & -1, \\ 0,7 & 0,2 \end{Vmatrix};$$

di essa i minori con segno ottenuto:

$$\begin{vmatrix} 0,8 & -1 \\ 0,7 & 0,2 \end{vmatrix}; \quad -\begin{vmatrix} -0,1 & 0,1 \\ 0,7 & 0,2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -0,1 & 0,1 \\ 0,8 & -1 \end{vmatrix}$$

quali a prescindere dal fattore $\frac{1}{100}$, sono dati da

$$86 \; ; \; 9 \; ; \; 2.$$

I valori u_1, u_2, u_3 devono essere a questi proporzionali, ma di somma nitaria; per ottenere ciò dividiamo per la somma avendo così

$$u_1 = \frac{86}{97} = 0,88659\ldots$$

$$u_2 = \frac{9}{97} = 0,09278\ldots$$

$$u_3 = \frac{2}{97} = 0,02061\ldots$$

n questo caso si nota chiaramente la tendenza delle k alle u, senza che vi sia però oscillazione.

Consideriamo invece l'altra legge di passaggio

$$\begin{vmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{vmatrix}$$

e la configurazione iniziale (0,2 ; 0,4 ; 0,4). Sarà

$$K \equiv (0,2 \; ; \; 0,4 \; ; \; 0,4)$$
$$K' \equiv (0,4 \; ; \; 0,3 \; ; \; 0,3)$$
$$K'' \equiv (0,3 \; ; \; 0,35 \; ; \; 0,35)$$
$$K''' \equiv (0,35 \; ; \; 0,325 \; ; \; 0,325).$$

La soluzione stabile, come prima è data dai minori di

$$\begin{Vmatrix} 0-1 & 0,5 \\ 0,5 & 0-1 \\ 0,5 & 0,5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0,5 \\ 0,5 & -1 \\ 0,5 & 0,5 \end{Vmatrix}$$

cioè — a prescindere da denominatori

$$75 \; ; \; 75 \; ; \; 75$$

e quindi

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0{,}333.$$

E si vede che con ciclo di oscillazione di due posti — almeno all'inizio — i valori tendono precisamente a dare questa configurazione limite, che è la stabile.

Abbiamo visto che, nel caso di passaggi da una classe all'altra, (passaggi e classi discontinui) si hanno ordinari sistemilineari. È quindi troppo evidente che il passaggio al continuo porterà ad equazioni funzionali; e precisamente ad equazioni differenziali, per passaggi continui e classi discrete; ad equazioni integrali per passaggi discreti e classi continue; ad equazioni integro differenziali per passaggi e classi continue.

Avremo dunque con il passaggio a limite per tempuscoli:

$$x'_r(t) = \sum_s a_{sr} x_s(t)$$

con a_{sr} costanti ed inoltre tali che:

$$\begin{cases} -1 \leq a_{rr} \leq 0 & r = 1, \dots n \\ 0 \leq a_{rs} \leq 1 & r \neq s \; ; \\ a_{s1} + \dots + a_{sn} = 0 \end{cases}$$

nel caso di classi discrete e passaggi continui. Avremo invece, come tipo più semplice:

$$a(\xi) = a(\xi) f(\xi) + \int a(\eta \xi) f(\eta) \, d\eta$$

con

$$\begin{cases} 0 \leq a(\xi) \quad , \quad a(\xi, \eta) \leq 1 \\ a(\xi) + \int a(\xi, \xi) \, d\xi = 1 \end{cases}$$

nel caso di classi continue e di passaggi discreti; ed infine:

$$\frac{\partial f(\xi, t)}{\partial t} = a(\xi) f(\xi, t) + \int a(\eta, \xi) f(\eta, t) \, d\eta$$

on:

$$\begin{cases} -1 \leq \alpha(\xi) \leq 0 \\ 0 \leq \alpha(\eta, \xi) \leq 1 \\ \alpha(\xi) + \int \alpha(\eta, \xi)\, d\eta = 0 \end{cases} ;$$

el caso di classi e passaggi continui.

Per completare — sia pure in un caso particolare — le dimostrazioni accennate nell'ipotesi di classi e passaggi discreti, sarà bene trattare due esempi di classi discrete e passaggi continui; sviluppando perciò le equazioni differenziali ora dette.

Sieno due le classi; $x_1(t)$ e $x_2(t)$ il numero di elementi al variare di t; e quindi

$$x_1(t) + x_2(t) = 1 \qquad t > 0.$$

Le equazioni saranno.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -\alpha \cdot x_1(t) + \alpha x_2(t) \qquad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1 \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = \beta\ x_1(t) - \beta x_2(t). \end{cases}$$

Col solito procedimento dell'equazione caratteristica otterremo — se si cerca la soluzione particolare $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$; $y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$, l'equazione

$$\begin{vmatrix} -\lambda - \alpha & \alpha \\ \beta & -\lambda - \beta \end{vmatrix} = 0$$

che ha le radici 0, $-(\alpha + \beta)$. Dunque sarà

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{-(\alpha+\beta)t} + \gamma_1 \\ x_2(t) &= c_2 e^{-(\alpha+\beta)t} + \gamma_2 ; \end{aligned}$$

le quali — tenuto conto del vincolo esistente per x_1, x_2, conducono a:

$$x_1(t) = c\, e^{-(\alpha+\beta)t} + \frac{1}{2} \quad ; \quad y_1(t) = -c\, e^{-(\alpha+\beta)t} + \frac{1}{2} \quad ; \quad |c| < \frac{1}{2} .$$

Nel caso di tre classi si avrà invece

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -(\alpha_2 + \alpha_3)\, x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \beta_1 x_1 - (\beta_2 + \beta_3)\, x_2 + \beta_3 x_3 \cdot \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 - (\gamma_1 + \gamma_2)\, x_3 \end{cases}$$

L' equazione caratteristica è

$$\begin{vmatrix} -\lambda-(\alpha_2+\alpha_3) & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & -\lambda-(\beta_1+\beta_3) & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\lambda-(\gamma_1+\gamma_2) \end{vmatrix} = 0$$

che ammette una radice $\lambda = 0$. A seconda della natura delle altre due [1]) si avranno, in forma reale, seni e coseni smorzati o esponenziali. Prendiamo questo caso in esame, dovrà risultare allora:

$$\begin{cases} x_1 = h_1 e^{\lambda_1 t} + h_2 e^{\lambda_2 t} + \gamma_1 \\ x_2 = K_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \gamma_2 \\ x_3 = l_1 e^{\lambda_1 t} + k^3 e^{\lambda_2 t} + \gamma_3 \end{cases};$$

e da esse per le condizioni $x_1 + x_2 + x_3 \equiv 0$, dovrà risultare necessariamente

$$h_1 + k_1 + l_1 = 0 \quad ; \quad h_2 + k_2 l_2 = 0 \quad ; \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 ;$$

infatti derivando, ed osservando che

$$\frac{d^r (x_1 + x_2 + x_3)}{dt^r} \equiv 0 ,$$

risulta anche:

$$(h_1 + k_1 + l_1)\lambda_1^r + (h_2 + k_2 + l_2)\lambda_2^r = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots$$

ciò che significa — almeno nel caso generale — di radici distinte.

$$(h_1 + k_1 + l_1) = (h_2 + k_2 + l_2) = 0.$$

I valori delle h, k, l, non sono poi indipendenti ma risultano fissati dalle condizioni iniziali, nel senso che k_1 ed l_1 sono vincolati e fissati da h_1; k_2 ed l_2 vincolati da h_2.

Si vede dunque come si procederebbe nel caso generale per la risoluzione e discussione di questi sistemi.

---

[1]) Queste per ovvie condizioni *concrete* e di interpretazione, (quale si è già vista) devono risultare *negative* o a parte reale negativa.

Statistica nelle collettività soggette a rinnovamento

Nota del socio corrispondente **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 6 marzo 1937 - XV).

Sunto. — L' A. continua la ricerca iniziata in una precedente Nota; considera, ora, collettività soggette non solo a scambi interni, ma a anche a « rinnovamento » — dovuto a comparsa di nuovi elementi o a scomparsa di altri. — Mostra come specialmente nei problemi demografici di incremento della popolazione, questo sia il metodo naturale, perchè gli usuali metodi ed indici statistici in generale conducono — allorchè si estrapola — a deduzioni inesatte sulla modalità del fenomeno.

1. In una Nota precedente [1]), pubblicata anch' essa in questi Rendiconti, ci siamo occupati delle collettività in seno alle quali avevano luogo dei passaggi di stato. Il numero degli individui (o in senso più stretto, i singoli individui) costituenti la collettività restava invariato nel tempo; la collettività stessa restava divisa in classi in corrispondenza del valore assunto da un certo carattere ed, al più, ogni individuo si trasferiva da una classe all' altra.

In questa Nota invece tratteremo delle collettività nelle quali, oltre ai cambiamenti di stato, si presenti anche il fatto della « nascita » e della « morte » degli individui. In altri termini, ammetteremo che possano comparire ad un certo istante individui nuovi non censiti precedentemente, oppure possano sparire altri già censiti. Il movimento complessivo di « rinnovamento » risulta pertanto costituito dall'insieme di questi tre movimenti: « nascita »; « morte »; « cambiamento di stato »; e lo scopo della statistica e dei calcoli qui sviluppati è quello di seguire l' evoluzione complessiva della collettività e delle sue classi, nel tempo, assegnata che sia *una legge costante* (s' intende, sempre di natura statistica) che dia il movimento verificatosi in un certo intervallo di tempo di durata prescritta. La costanza della legge va intesa nel senso che, statisticamente, in qualsiasi intervallo di tempo avente durata eguale a quello prescelto, si presentano frequenze (e probabilità) eguali di rinnovamento fra una classe e l' altra.

Qui occorre tener presente anche la variazione del numero degli indi-

---

[1]) G. Andreoli, *Statistica delle variazioni di stato.* Rend. R. Acc. Sc. Napoli, 1937 - XV.

vidui: l'assumere costantemente uno stesso numero come costituente la collettività, indurrebbe in errore nella valutazione del fenomeno.

Vedremo, anche con qualche esempio, che definiti gli abituali indici statistici essi non dànno conto completo del fenomeno come effettivamente si svolge.

Così, *considerato il rapporto fra numero d'individui in un certo stadio raggiunto dalla collettività e il numero d'individui in uno stadio precedente, può benissimo accadere che tale rapporto non resti costante, mentre invece la legge del fenomeno (e quindi* LE VERE *modalità intrinseche del rinnovamento) siano costanti;* anzi, questa è la generalità dei casi.

Si può verificare che questo rapporto tenda con regolarità, non oscillando, ad un certo valor limite; si può anche verificare che esso tenda invece ad un limite, ma oscillando.

Queste oscillazioni possono essere rapide e più o meno fortemente smorzate; ma possono essere anche lente, ed a smorzamento molto debole.

Se si effettua quindi il rilevamento, in fase ascendente, degli abituali indici statistici, la collettività sembra in aumento con una certa legge; se il rilevamento è effettuato in fase decrescente, la collettività sembra in decremento.

Ma non è lecito estrapolare e ritenere che vi sarà nel primo caso sempre ed illimitato aumento; nel secondo, sempre ed illimitato decremento.

Gli indici rilevati si rivelano insufficienti a seguire il fenomeno; la legge — come abbiamo detto — può essere rimasta costante, e gli indici rilevati, invece, starebbero ad indicare una variazione che non c'è; che è soltanto apparente e che è insita alla stessa definizione di tali indici.

Essi indici dànno e dicono qualcosa, purchè si consideri il fenomeno quasi staticamente; a lentissima variazione cioè; cessano di rappresentare qualcosa di concreto se si vuole estrapolare il comportamento medio, da essi denunciato, a stadi molto lontani nel tempo: e mostreremo, esplicitamente, questo fatto.

2. Chiamiamo ora (K) la solita collettività; $(K_1), (K_2), \ldots, (K_n)$ le sue classi costituite in relazione alle modalità di un certo carattere Ω, ed aventi un numero rispettivo $k_1, k_2, \ldots k_n$ di individui, sicchè (K) risulti avere $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ individui.

Sia ora (K') lo stadio successivo raggiunto dopo un tempo $\bar{o}$, costituito dalle classi $(K'_1), \ldots (K'_n)$ relative alle stesse modalità del fenomeno.

Il passaggio dello stadio originario al successivo, comprensivo di « passaggi di classe », « nascite » (o fenomeni equivalenti), « morte » (o fenomeni equivalenti) avvenga secondo lo schema che:

dagli elementi della r-sima classe originaria, traggono origine nello stadio successivo, elementi di tutte le altre classi, proporzionalmente al numero primitivo.

In altre parole, gli individui di (K_r) in numero di k_r dànno origine ad $a_{r1} k_r$ individui della prima classe nel nuovo stadio; ad $a_{r2} k_r$ della seconda asse e così via.

Le a non rappresentano ora soltanto probabilità o frequenze di passaggi, a inglobano anche coefficienti di riproduzione, e di eliminazione. Esse ora ono soggette perciò alla sola condizione di essere positive.

Si presenta qui il significato da dare alla « costanza della legge »: noi mmetteremo precisamente che *non* vi sia ereditarietà; e che quindi nel assaggio da uno stadio a quello successivo non influisca tutta la « storia » tutta la « genealogia » dell' elemento; questi seguirà soltanto, statisticaente, le sorti della classe cui appartiene e di cui la legge è sempre quella ata dai coefficienti a. Il fenomeno, dunque, nel passaggio da uno stadio al uccessivo, si svolge come se su ogni classe agisse un certo criterio di scambi, ale da dare risultati proporzionali al numero degli elementi della classe.

Pertanto, ammesso di esaminare gli stadi successivi di una collettività oggetta ad una legge costante di rinnovamento, tale legge si esprimerà con ina « *matrice* » — ad elementi tutti positivi (o nulli, al più)

$$\begin{array}{c|cccc} & (K'_1) & (K'_2) & \dots & (K'_n) \\ (K_1) & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ (K_2) & a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (K_n) & a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

ntendendosi con tale schema che, nella riga r-sima, i coefficienti a vadano moltiplicati per k_r, numero degli elementi di (K_r): e che le somme in coonna di tali prodotti diano i numeri k' relativi alle classi del secondo stadio, cioè

$$k'_s = a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \dots + a_{sn} k_n .$$

Si noti bene che, come abbiamo già implicitamente detto, nè le k, nè le a, nè le k' sono soggette ad avere per somma l' unità; e che, anzi, tale riduzione ad una massa unitaria falserebbe la legge di passaggio data dalle a, in quanto $a\, k_r$ sostituirebbe il rapporto $\frac{k_r}{k}$, portando perciò ad una legge diversa nella quale al posto delle a_{rs} figurerebbero le quantità

$$\frac{a_{rs} k}{k}$$

dipendenti dallo stadio iniziale e da quello finale.

3. Anche qui, come nella precedente nota e nel primo tipo di statistica, si tratta di esaminare alcuni problemi fondamentali: e precisamente

I. Esistenza e costituzione di collettività che restano invariate per una certa legge di trasformazione, o quanto meno, che restino invariate come composizione e rapporto fra le classi.

II. Eventuale convergenza degli stadi successivi di una collettività in evoluzione, secondo una certa legge, verso forme limiti.

III. Eventuale presenza di cicli di stadi i quali, appunto, si ripetano ciclicamente, se in evoluzione secondo quella legge.

IV. Eventuale convergenza degli stadi successivi verso cicli limiti.

Ed a questi problemi, per stabilire la connessione con gli abituali indici statistici, va connesso quest'altro:

V. Caratterizzare il comportamento dell'indice di riproduttività al variare dello stadio.

In altre parole, detto $\rho^{(p)}$ il rapporto fra numero di elementi nello stadio p-esimo e numero di elementi nello stadio precedente:

$$\rho^{(p)} = \frac{k'^{(p)}}{k'^{p-1}} = \frac{k_1^{(p)} + \ldots + k_n^{(p)}}{k'^{p-1}_1 + \ldots + k'^{p-1}_n}$$

si tratta di seguire la variazione delle $\rho^{(p)}$ al variare di p; e di caratterizzare se, ed in qual modo, esse dipendono dallo stadio di partenza.

Si scorge chiaramente che, ad esempio, in quistioni demografiche i rapporti $\rho^{(p)}$ stanno a significare precisamente i fattori d'incremento di una popolazione in un certo intervallo di tempo.

Posti così i problemi fondamentali, sarà bene completare lo schema di partenza con due definizioni.

Una collettività è «*chiusa*» di fronte alla trasformazione A, se il numero dei suoi componenti resta invariato; in particolare sono chiuse quelle collettività nelle quali vi sono soltanto passaggi di stato: le ρ per essa assumono soltanto il valore 1.

Una collettività è ad «*assetto stabile*» di fronte alla trasformazione A, se i rapporti fra i numeri dei componenti le singole classi restano invariati nei successivi stadii di evoluzione; le ρ assumono per esse sempre lo stesso valore.

Una collettività infine è «*invariante*» se simultaneamente è chiusa e ad assetto stabile: restano allora invariati tutti i numeri che esprimono i componenti delle singole classi.

4. Un'interpretazione geometrica (come quella già fatta nell'altra Nota) ci porrà in grado di rispondere a vari di questi problemi. Per rendere il procedimento estensibile all'ordinaria intuizione, ci limiteremo al caso di tre sole classi, ripetendosi in generale lo stesso ragionamento.

La matrice dei passaggi sia la A data da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad a \geq 0.$$

La collettività sia rappresentata in uno spazio di configurazione; ogni collettività (K) è rappresentata da un punto K di cui le coordinate sono precisamente i numeri k_1, k_2, k_3; ed essendo questi tutti positivi o nulli, le collettività concrete saranno solo quelle i cui punti imagini sono nel primo ottante.

Inoltre — come è banale — due collettività aventi la stessa composizione percentuale sono rappresentate da punti allineati con l'origine; e che dopo la trasformazione A, gli stadi successivi delle due date restando ancora per la loro nella stessa composizione percentuale saranno ancora rappresentate da altri due punti a lor volta allineati con l'origine.

Consideriamo la collettività (E) di cui le coordinate, cioè numeri degli elementi nelle classi sia $1, 0, 0$; per la A, nel suo secondo stadio essa avrà come imagine il punto E', di coordinate a_{11}, a_{21}, a_{31}; similmente la (F) di coordinate $0, 1, 0$ e la (G) di coordinate $0, 0, 1$ daranno $(F'), (G')$ come secondi stadi, individuate da a_{12}, a_{22}, a_{32} e da a_{13}, a_{23}, a_{33}.

L'origine resta invariata per A.

Quindi il triedro T di vertice O e spigoli OE, OF, OG, viene trasformato dalla A nel triedro T' ancora di vertice O e spigoli XE', OF', OG': corrispondendosi interno ad interno, spigolo a spigolo omonimo etc.: *essendo il secondo interno al primo.* Quindi tutto l'*interno* del triedro T si muta nell'interno di T'; a sua volta — sempre per la stessa trasformazione A si muta T' in T'' — secondo stadio successivo all'iniziale e così via.

Gli stadi successivi del triedro T, cioè $T', T'', \ldots$ sono dunque incapsulati ognuno nel successivo.

In generale, e salvo casi d'eccezione, essi tendono a restringersi attorno ad una certa direzione T^* che è interna simultaneamente a tutti essi ed è limite delle direzioni $OE, OE', \ldots$; $OF, OF', \ldots$; $OG, OG' \ldots$

D'altro canto data una qualsiasi collettività (K), il suo punto rappresentativo K si trova certamente *dentro* uno dei triedri $T^{(\nu)}$ e *fuori* di quello rappresentante lo stadio successivo $T^{(\nu+1)}$ — (a meno che non si trovi proprio sulle facce o sugli spigoli di T^{ν}, ciò che non modifica le conclusioni).

Allora lo stadio (K') si troverà *dentro* $T^{(\nu+1)}$ e *fuori* di $T^{(\nu+2)}$; (K'') dentro $T^{(\nu+2)}$ e fuori di $T^{(\nu+3)}$, e così via. Si noti che Θ è trasformata in sè stessa da A, dunque è stabile.

Dunque, le rette $OK, OK', \ldots, OK^{\nu} \ldots$ tendono anche esse — *almeno* nel caso generale alla direzione Θ dianzi definita.

Ma, parlare di direzione, significa parlare di composizione percentuale come abbiamo già detto; dunque:

Nei suoi stadii successivi una qualunque collettività tende (in generale) *verso una composizione fissa, cioè verso una collettività ad assetto stabile.*

Per noti principi matematici questa collettività ad assetto stabile soddisfa al sistema:

$$\begin{cases} \rho\theta_1 = a_{11}\theta_1 + a_{21}\theta_2 + a_{31}\theta_3 \\ \rho\theta_2 = a_{12}\theta_1 + a_{22}\theta_2 + a_{32}\theta_3 \\ \rho\theta_3 = a_{13}\theta_1 + a_{23}\theta_3 + a_{33}\theta_3 \end{cases}$$

e quindi ρ deve essere una radice positiva (che nel caso concreto esisterà sempre) dell'equazione

$$\begin{Vmatrix} a_{11}-\rho & a_{21} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\rho & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\rho \end{Vmatrix} = 0$$

mentre le Θ si ricavano come minori della matrice ora scritta.

Veniamo così a rispondere affermativamente ai problemi I e II, e negativamente invece ai problemi III e IV — *almeno nel caso generale* — (se cioè non si verificano peculiari condizioni).

Per il problema V le stesse considerazioni ci permettono di guardare che cosa possa avvenire.

Osserviamo che il piano $\pi_1 \equiv EFG$ corrisponde al valore numerico 1 di $k = k_1 + k_2 + k_3$; e che quindi tutte le collettività statistiche che hanno numero complessivo di elementi eguale ad 1, si trovano rappresentate da punti di tale piano, anzi del triangolo equilatero EFG su esso tracciato.

Similmente tutti i punti che rappresentano collettività a numero totale di elementi k, si trovano sul piano parallelo ad EFG e passante ad una distanza K volte maggiore dall'origine.

Intanto quello che avviene per una collettività in relazione al problema V, avverrà anche per una ad essa proporzionale; dunque possiamo partire da una (K) che originariamente si trovi su π_1.

Per quanto precede, (K) si troverà in $E'F'G'$; e quindi il rapporto $\rho = \dfrac{K'}{K}$ sarà compreso fra due numeri μ' e ν' corrispondenti ai due piani paralleli a π_1 e passanti rispettivamente per il vertice più lontano e per quello più vicino ad O, fra E', F', G'.

Il procedimento si va ripetendo; e si vede che il comportamento dei numeri ρ può variare enormemente a seconda — ad esempio — che il piano

$F'G'$ traversi il piano EFG in una retta passante *dentro* il triangolo EFG o *fuori* di esso.

Questo fatto conferma quanto dicevamo sulla insufficienza degli abituali indici per dare la variazione della collettività (K) nei suoi stadi successivi.

5. Un esempio, tipico, permetterà di rendersi conto in modo concreto di questa affermazione; esso è un caso di eccezione, del resto.

Si abbia, quale esempio convenzionale, una collettività di animali i quali vivano due anni, passando un anno nella fase larvale ed un anno in quella adulta; il cambiamento, la nascita, la sparizione avvenga simultaneamente, all'inizio dell'anno. La fase larvale sia L, la fase adulta A; ed all'inizio dell'esame coesistano l larve ed a adulti.

La legge di riproduzione sia tale che solo la metà delle larve riesce a diventare adulta; mentre ogni adulto dia origine (in media statistica) a 10 larve.

Si ha quindi nel passaggio da un anno all'altro:

	a'	l'
a	0	10
l	$\frac{1}{2}$	0

$$a' = \frac{l}{2} \; ; \; l' = 10\,a.$$

La *stessa* legge continui a valere illimitatamente, per un certo numero di anni, dando luogo a generazioni successive $a'', l''; a''', l''' ; \ldots$

Ora è facile vedere che:

$$\begin{cases} a' = \dfrac{l}{2} \; ; \; l' = 10\,a \\ a'' = \dfrac{l'}{2} \; ; \; l'' = 10\,a' \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

conduce alla:

$$\begin{cases} a' = \dfrac{l}{2} \; ; \; l' = 10\,a \\ a'' = 5\,a \; ; \; l'' = 5\,l \\ a''' = \dfrac{5}{2}\,a \; ; \; l''' = 10{,}5\,l \\ a^{IV} = 5^2\,a \; ; \; l^{IV} = 5^2\,l \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Quindi, gli abituali indici statistici di accrescimento

$$\rho' = \frac{a' + l'}{a + l} \; ; \; \rho'' = \frac{a'' + l''}{a' + l'} \; ; \; \rho''' = \frac{a''' + l'''}{a'' + l''} \; ; \ldots$$

assumono in questo caso i valori

$$\rho' = \frac{10\,a + \frac{l}{2}}{a + l} \; ; \; \rho'' = \frac{5\,(a + l)}{10\,a + \frac{l}{2}} \; ; \; \rho''' = \frac{5\left(10\,a + \frac{l}{2}\right)}{1\,(a + l)} \; ; \ldots$$

cioè

$$\rho' : \rho'' = \frac{5}{\rho'} \; ; \; \rho''' \quad \rho' \; ; \; \rho^{IV} \quad \rho'' : \ldots$$

tutti i rapporti di posto pari essendo eguali fra loro, e così quelli dispari; i rapporti dipendono inoltre dalla composizione originaria della collettività.

Se invece dei numeri 10 ed $\frac{1}{2}$ si hanno in numeri m ed n, e quindi la legge diventa:

	a'	l'
a	0	m
l	n	0

si trovano i rapporti

$$\begin{cases} \dfrac{ma + nl}{a + l} = \rho' = \rho''' = \rho^{V} \ldots \\ \dfrac{mn\,(a + l)}{ma + nl} = \dfrac{mn}{\rho'} = \rho'' = \rho^{IV} \ldots \end{cases}$$

Si vede che ρ' va dal valore m, allorchè $l = 0$: al valore n, allorchè $a = 0$; e ρ'' segue la variazione inversa.

Si riscontra inoltre che tali indici statistici ρ — quelli usuali — avrebbero rivelato un'apparente periodicità biennale come riproduttività; ciclo che in realtà non esiste perchè la legge è rimasta invariata.

È bene rilevare che il caso è proprio uno di eccezione: si verifica infatti che OE, OF si mutano in OE'', OF'', ma che OF'' coincide con OE, mentre OE'' coincide con OF; sicchè non si presenta quel successivo restringersi dell'angolo al vertice.

A maggior ragione, per n classi, si potrebbero rivelare cicli apparenti durata proprio eguale ad n volte quella dell' intervallo fondamentale di npo. Tuttavia occorre notare subito un fatto che concorre a rendere molto no sensibile l' effetto di tali cicli apparenti.

In realtà, la (K) viene ad essere composta di tante altre scaglionate l tempo, per così dire; nel nostro esempio il mutamento di larve in adulti li nascite non è simultaneo ma va sfioccato nel tempo.

Quindi, anche nella ricerca degli usuali indici statistici non si presenta solo ciclo, ma più cicli sfasati nel tempo e l' uno rispetto all' altro; in l guisa si ottiene nel calcolo un valor medio dei diversi valori componenti ciclo: quasi una « perequazione ».

Così, già nel nostro caso se il fenomeno di riproduzione e di passaggio viene per semestre e se a_1, l_1 sono gli stadi del primo; a_2, l_2 quelli del condo semestre, si troveranno i valori

$$\frac{1}{2}(\rho'_1 + \rho''_2) \; ; \; \frac{1}{2}(\rho''_2 + \rho'_1) \; ; \; \frac{1}{2}(\rho'_1 + \rho''_2) \ldots \; ;$$

l in effetti questi dànno una perequazione, tanto che se $a_1 = a_2 ; l_1 = l_2$, trova addirittura il valore unico

$$\frac{1}{2}(\rho' + \rho'').$$

Tuttavia, in generale, anche se attenuato per i suddetti motivi il ciclo pparente rimane; e se per un certo motivo viene soppressa una (o più) ise componente, esso riappare con maggior intensità.

Come dicevamo, però questo caso si presenta non come caso generico.

Nel caso generico, la collettività esaminata tende ad un assetto stabile; ell' assetto stabile — è facile controllarlo — specie con quanto diremo fra reve — si verifica appunto che i successivi stadi lasciano invariata la com- osizione e fanno variare solo il numero totale di elementi, secondo una egge di progressione geometrica.

Pertanto:

Salvo casi eccezionali (come quelli dell' esempio sviluppato) *la collettività tende ad aumentare (o a diminuire) in progressione geometrica; i rapporti* ρ *fra stadi successivi tenderanno perciò ad essere eguali fra loro ed eguali a quello che corrisponde all' assetto stabile.*

Tuttavia questa tendenza può avvenire, sia in modo uniforme e regolare (per decrescenza o crescenza), sia in modo ciclico smorzato; e se il fattore di smorzamento è prossimo all' unità, si verificheranno egualmente delle oscillazioni cicliche (in tali rapporti) *eventualmente a lungo periodo, le quali potrebbero indurre a deduzioni errate di accrescimento o di diminuzione della collettività.*

5. Come secondo esempio, per mostrare come gli usuali indici statistici possano non dare le modalità complete del fenomeno, consideriamo una collettività a numero invariante di individui, nella quale si verifichino *solo* passaggi da una classe all'altra.

La legge dei passaggi sia « semplice » ed « isotropa »; semplice nel senso che nell'intervallo di tempo considerato nell'evoluzione da uno stadio al successivo ciascun elemento non possa che passare *soltanto* ad una delle due classi contigue a quella in cui si trova, o restare in essa; isotropa, nel senso che tali passaggi avvengano nello stesso modo per tutte le classi. Sia, al solito (K) la collettività esaminata, $(K_1), \ldots (K_n)$ le sue classi con $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ 1.

Con le ipotesi fatte gli elementi che all'origine dei tempi appartenevano alla classe (K_r), dopo il tempo τ, alla fine del primo stadio di evoluzione si troveranno o in (K_{r-1}) o in (K_r) o in (K_{r+1}).

Per l'ammessa isotropia, vi sarà la frazione α che esprime quanti sono passati alla classe inferiore; la frazione ω che dà quanti sono rimasti nella classe d'origine; la frazione a che dà quanti sono passati alla seguente riferendosi a k_r. Quindi α, ω, a indicano frequenze e la loro somma deve essere l'unità.

Vi sono però due eccezioni; gli elementi della prima classe — di (K_1) — possano passare nella seconda o restare nella prima, ma non possono passare a classe più bassa; quelli che dovrebbero passare resteranno nella prima, ovviamente. Quindi, per K_1 ad ω va sostituito $\alpha + \omega$.

Similmente per l'ultima classe (K_n); i suoi elementi possono discendere in (K_{n-1}) o restare in (K_n) stesso — ma, non possono ulteriormente salire, e quelli che dovrebbero salire, resteranno in (K_n). Perciò ad ω va qui sostituito $\omega + \alpha$. La matrice dei passaggi diventa dunque

$$A \equiv \begin{Vmatrix} \alpha+\omega & a & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \alpha & \omega & a & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \omega & a \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \alpha & \omega+a \end{Vmatrix} \qquad \alpha + \omega + a = 1.$$

Seguendo lo schema già detto, dopo il tempo τ, la collettività si viene a trovare ridistribuita rispetto al carattere Ω di classificazione nella nuova configurazione statistica (K'), costituita da $(K'_1) \ldots (K'_n)$; e per quanto abbiamo ora visto, sarà

$$\begin{cases} k'_1 = (\alpha+\omega)\, k_1 + a k_2 \\ k'_2 = a k_1 + \omega k_2 + a k_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ k'_{n-1} = a k_{n-2} + \omega k_{n-1} + a k_n \\ k_n = a k_{n-1} + (\omega + a)\, k_n \end{cases}$$

Ricerchiamo ora se esista e quale sia l'assetto stabile della collettività; per quanto abbiamo sviluppato dovrà esistere una distribuzione $S) \equiv (S_1) + \ldots + (S_n)$ che non muta se si assoggetta alla trasformazione A.

Essa sarà in equilibrio statistico; per ogni classe il numero degli individui nuovi che vengono a farne parte durante il tempo τ è esattamente guale a quelli che cessano di far parte di essa.

Occorre dunque che tanto le k'_r, quanto k_r sieno eguali ad s_r, ed allora esteranno eguali anche tutte le k successive.

Il sistema dianzi scritto, con tale sostituzione, e trasportato che sia tto a secondo membro, dà:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = (\alpha + \omega - 1)\, s_1 + \alpha s_2 \\ 0 = \quad a\, s_1 + (\omega - 1)\, s_2 + \alpha s_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\

risulta così definito da

$$s_r \quad \lambda^r \frac{1-\lambda}{1-\lambda^n} \quad \mu^{n-r-1} \frac{1-\mu}{1-\mu^n} \left(\lambda \quad \frac{\alpha}{a} \; ; \mu - \frac{a}{\alpha} \right).$$

Dal punto di vista statistico, si possono definire, da questa legge di passaggi, altri tre indici, analoghi ai numeri α, ω, a e che ci dicono quale frazione della (K) si è declassata; quale ha conservato il suo rango, quale ha invece aumentata la sua classe.

Questi tre indici [1]) sieno $\bar{\alpha}, \bar{\omega}, \bar{a}$; e calcoliamone la loro espressione.

Anche ora mentre α, ω, a non dipendono dalla collettività in esame ed esprimono una legge assoluta di passaggio, rileveremo che $\bar{\alpha}, \bar{\omega}, \bar{a}$ dipendono invece dalla collettività e dallo stadio in cui essa si trova.

Quindi il loro uso, causa la loro variazione, condurrebbe ad inferire un cambiamento graduale della legge dei passaggi, cambiamento il quale in realtà non c'è. Ed inoltre, calcolati essi per i diversi stadi si trova precisamente che essi tendono ai valori corrispondenti all'assetto stabile: cioè:

$$\begin{aligned} &\alpha \;,\; \bar{\alpha}' \;,\; \bar{\alpha}'' \;, \ldots \to \bar{\alpha}^* \\ &\bar{\omega} \;,\; \bar{\omega}' \;,\; \bar{\omega}'' \;, \ldots \to \bar{\omega}^* \\ &\bar{a} \;,\; \bar{a}' \;,\; \bar{a}'' \;, \ldots \to \bar{a}^* \end{aligned}$$

le quantità con asterisco riferendosi all'assetto stabile.

In effetti, per la loro stessa definizione, risulta — causa la legge A —

$$\begin{cases} \bar{\alpha} = \dfrac{1}{k} (\alpha k_1 + \alpha k_2 + \ldots + \alpha k_n) = \alpha (1 - k_1) \\ \bar{\omega} = \dfrac{1}{k} \left((\alpha + \omega) k_1 + \omega k_2 + \ldots + \omega + a \right) k_n) = \omega + \alpha k_1 + a k_n \\ \bar{a} = \dfrac{1}{k} (a k_1 + a k_2 + \ldots + a k_{n-1}) = a (1 - k_n) \\ \alpha + \bar{\omega} + \bar{a} = 1 \qquad\qquad ; k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1. \end{cases}$$

In modo anologo si trovano i valori per il secondo, terzo,... stadio, ponendo le $k', k'' \ldots$ al posto delle k: e siccome le k tendono ai valori dell'assetto

[1]) L'indice ω è collegato a quello che per gli elementi radiattivi si dice « periodo »: ed alla vita media. Basta considerare il tempo $r\tau$ dove r è tale che $\omega^r \quad \frac{1}{2}$, e quindi $r = \lg 2 / \lg \omega$ per avere il periodo; e $2r\tau$ per avere la « vita media ».

abile, risulta precisamente

$$\begin{cases} \alpha^{\nu} \quad \alpha_1(1 - k_1^{\nu}) \to \alpha(1 - s_1) - \bar{\alpha}^{*} \\ a^{\nu} \quad a_n(1 - k_n^{\nu}) \to a(1 - s_n) \quad \bar{a}^{*} \\ \bar{\omega}^{\nu} \quad 1 - \bar{\alpha}^{\nu} - \bar{a}^{\nu}. \end{cases}$$

uest' ultime formule, sostituendo alle s i loro valori, danno:

$$\bar{\alpha}^{*} = \alpha\left(\frac{1 - \lambda^{n-1}}{1 - \lambda^{n}}\right) \quad ; \quad \bar{a}^{*} = \lambda a\left(\frac{1 - \lambda^{n-1}}{1 - \lambda^{n}}\right)$$

d è facile vedere che risulta:

$$\bar{\alpha}^{*} = \bar{a}^{*} = \alpha a\left(\frac{a^{n-1} - \alpha^{n-1}}{a^{n} - \alpha^{n}}\right) \quad ; \quad \bar{\omega}^{*} \quad 1 - 2\bar{\alpha}^{*}$$

come doveva precisamente essere per il significato di $\bar{\alpha}^{*}$ ed a^{*}.

Si verifica precisamente quanto abbiamo affermato e visto, anche nell'altro caso, dell'insufficienza degli usuali indici nel seguire fenomeni di scambio e di rinnovamento in seno a collettività: quale ad esempio la *permanenza* media di un individuo in una classe, che sarebbe appunto dato da $\bar{\omega}^{*}\tau$

7. In questo paragrafo daremo ora un accenno ad una più completa trattazione della presenza dei cicli apparenti nei coefficienti di riproduttività.

Dal punto di vista matematico, le condizioni affinchè una collettività sia ad assetto stabile, si traducono nel trovare i numeri θ radici dell'equazione algebrica di grado n:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \theta & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \theta \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} - \theta \end{vmatrix} = 0.$$

Siccome si tratta di quistioni concrete, nelle quali i numeri rappresentano valori approssimati di media, potremo *sempre* scartare il caso di due o più radici eguali, e supporre che le radici sieno:

$$\lambda, \mu, \dots, \xi:$$

Esse però potranno essere reali e positive, reali e negative, imaginarie.

L'assetto stabile trovato dianzi nel caso generico, corrisponde per necessità ad una radice reale positiva.

Con il procedimento dei minori del determinante, *applicato anche negli altri casi*, si trovano precisamente n gruppi di n numeri (i quali non rappresentano in generale collettività, perchè possono essere negativi o imaginari)

$$\begin{cases} (R) = (L_1)\ ,(L_2)\ \ldots(L_n)\ ;\ l\ = l_1\ + l_2\ + \ldots l_n \\ M_1 = (M_1)\ ,(M_2)\ \ldots(M_n)\ ;\ m = m_1 + m_2 + \ldots m_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

tali che trattati *come se fossero collettività* e sottoposti alla trasformazione A diano gli stadi successivi ad ognuno di essi

$$\begin{cases} (L)\ ,(L')\ ,(L'')\ \ldots \\ (M)\ ,(M')\ ,(M'')\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

che sono ad assetto stabile; sicchè si avrà:

$$\begin{array}{lll} l'_r = \lambda l_r\ ;\ l''_r = \lambda l'_r\ ,\ \ldots & & (r = 1\ ,\ \ldots\ ,\ n) \\ m'_r = \mu m_r\ ;\ \mu''_r = \mu m'_r\ ,\ \ldots & & \end{array}$$

Si possono anche, di conseguenza trovare dei numeri (reali o complessi) $c_1\ ,c_2\ ,\ldots\ ,c_n$, tali che assegnata una qualsiasi collettività (K) si abbia:

$$(K) = c_1(L) + c_2(M) + \ldots + c_n(X)$$

e quindi anche

$$k = c_1 l_1 + c_2 m_2 + \ldots + c_n x$$

oltre alle

$$\begin{cases} k_1 = c_1 l_1 + c_2 m_1 + \ldots + c_n x_1 \\ k_2 = c_1 l_2 + c_2 m_2 + \ldots + c_n x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_n = c_1 l_n + c_2 m_n + \ldots + c_n x_n \end{cases}.$$

È facile dedurne che, per tali stadi successivi a (K) dovendo essere per quanto precede:

$$(K') = c_1(L') + c_2(M') + \ldots + c_n(X')$$

ò implica:

$$(K') = c_1\lambda(L) + c_2\mu(M) + \ldots + c_n\xi(X)$$

successivamente:

$$(K^{(\nu)}) = c_1\lambda^\nu(L) + c_2\mu^\nu(M) + \ldots + c_n\xi^\nu(X)$$

a cui

$$k^{(\nu)} = c_1\lambda^\nu l + c_2\mu^\nu m + \ldots + c_n\xi^\nu x.$$

Pertanto i numeri ρ relativi alla collettività (K) saranno dati da

$$\rho^{(\nu)} = \frac{c_1\lambda^\nu l + c_2\mu^\nu m + \ldots + c_n\xi^\nu x}{c_1\lambda^{\nu-1} l + c_2\mu^{\nu-1} m + \ldots + c_n\mu^{\nu-1} x}.$$

Se ora supponiamo che λ abbia il più grande modulo $|\lambda|$ fra tutte le radici, tali rapporti si scriveranno, dopo semplici riduzioni:

$$\rho^\nu \quad |\lambda| \; \frac{c_1\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)^n l + c_2\left(\frac{\mu}{\mu|}\right)^n m + \ldots}{c_1\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)^{n-1} l + c_2\left(\frac{\mu}{|\mu|}\right)^{n-1} m + \ldots}.$$

Nel caso che λ sia positiva e che di radici a modulo massimo ve ne sia una sola, — (ciò per fissare le idee nella discussione), al crescere di n tutti i termini al numeratore ed al denominatore tendono a zero, salvo il primo di ognuno di essi, e quindi:

$$\rho^{(\nu)} \to \lambda$$

purchè la collettività originaria non fosse tale che $c_1 = 0$:

E questo giustifica quanto abbiamo detto di recente.

Su tale schema va impostata tutta la discussione dei casi che si possono presentare, distinguendo se vi siano una o più radici di modulo eguale, e distinguendo i casi speciali di collettività nelle quali eventualmente delle c fossero nulle.

Sul metodo di costruzione degli indici di gravità nel campo degli infortuni sul lavoro

Nota del dott. **Donato Miani-Calabrese**, *presentata dal socio* **F. Bottazzi**

(Adunanza del dì 6 marzo 1937 - XV)

Sunto. — L'A., dopo aver richiamato il concetto di indice di gravità nel campo infortunistico, esamina i criteri generalmente adoperati nella costruzione e propone alcuni emendamenti. La illustrazione teorica è completata da una pratica applicazione dell'indice nella forma usuale ed in quella corretta.

1. È noto che nella statistica degli infortuni sul lavoro, per ottenere misura dell'entità del fenomeno non è sufficiente il calcolo dei soli indici di frequenza. Questi, invero, esprimono il numero di infortuni in rapporto a 1000 operai-anno o a 1000, 100.000, 1 000.000 di ore lavorative, e considerano, quindi, tutti i casi come simili fra loro. Ma, in realtà, sia dal punto di vista economico, ai fini del risarcimento, sia dal punto di vista sociale, ai fini della diminuita capacità lavorativa, ciascun caso ha una importanza o gravità diversa. È stata, quindi, rilevata la necessità di tener conto, non solo della frequenza degli infortuni — in rapporto ad una certa categoria industriale, ad una certa causa di sinistro, ad una certa sede del corpo lesa, ecc. — ma anche della gravità di essi.

Allo scopo di dare una misura della gravità complessiva sono stati proposti degli indici, nel calcolo dei quali la base è generalmente quella adoperata nel calcolo dei tassi di frequenza, e cioè:

a) o il migliaio di unità operai-anno,

b) o il migliaio (oppure il milione) di ore lavorative.

L'unità « operaio-anno » viene definita [1]) sia come un operaio che lavori 300 giorni all'anno, senza tener conto del numero delle ore di lavoro, sia come un operaio che lavori 3000 ore all'anno, sia, ancora, come un operaio che lavori 2400 ore all'anno. Nel primo significato l'unità è adoperata soprattutto in Austria, Belgio, Finlandia, Paesi Bassi e Norvegia; nel secondo è stata impiegata nelle statistiche tedesche e svedesi fino al 1918; nel terzo, infine, è in uso in Germania e Svezia dal 1919.

[1]) *Bureau international du travail: Les méthodes de la statistique des accidents du travail.* (Rapport soumis à la Conférence internationale des Statisticiens du Travail (29 octobre-2 novembre 1923). Études et Documents. Série IV, Statistique N. 3, 1923.

Come è stato recentemente osservato dal MAURELLI [1]), il primo dei due todi presenta l'inconveniente di far riferimento ad « un valore fittizio, cui significato può anche variare da un caso all'altro ».

Anche il « Committee on Statistics and Compensation Insurance Cost » l Bureau of Labor Statistics degli Stati Uniti d'America, che rappresen- va gli Stati Uniti in seno alla « International Association of Industrial cidents Boards and Commissions » [2]), dopo avere, in un primo momento, nsiderato, come riferimento, l'unità operaia, è pervenuto, poi, alla deci- one di adottare il valore di 1000 ore lavorative, affermando che « the 00-hour exposure is a stable, scientific, mathematical unit of measure, hich is what is needed for the measurement of accidents rates ».

Il « Bureau International du Travail » [3]) ha ritenuto consigliabile il ferimento a 100.000 ore lavorative.

In Italia l'Associazione Nazionale per la Prevenzione degli infortuni ul lavoro (oggi Ente Nazionale Prevenzione Infortuni), sia in alcune ri- cerche compiute su dati raccolti nello svolgimento dell'opera di propa- anda per la prevenzione [4]) [5]), sia nello « Schema per la organizzazione ella prevenzione negli stabilimenti » [6]) ha adottato il riferimento a 1000 re lavorative.

L'indice di gravità si basa sul principio di esprimere, in termini di empo sottratto al lavoro a causa degli infortuni, la maggiore o minore mportanza degli infortuni stessi. Ma non tutti gli infortuni si risolvono in na temporanea incapacità, facilmente valutabile in giorni. Molti casi danno uogo, dopo un certo periodo d'inabilità temporanea, a residui di invalidità ermanente e in alcuni casi il sinistro può avere esito letale. E poiche

---

[1]) MAURELLI C., *Le statistiche degli infortuni* in « Securitas », Rassegna della icurezza e dell'igiene nel lavoro. Ediz. dell'Ente Nazionale Propaganda Preven- ione Infortuni, Anno XXIII — giugno 1936 — N. 6.

[2]) *U. S. Department of labor-Bureau of labor statistics*: « Standardisation of Indu- strial Accident Statistics » (Reports of the Committee on Statistics and Compensation Insurance Cost of the International Association of Industrial Accident Boards and Commissions — 1915-1919 — Bulletin of the U. S. Bureau of Labor Statistics N. 276, Washington, Government Printing Office 1920.

[3]) *Bureau international du travail*: « *La standardisation internationale des statistiques du travail* ». Etudes et Documents, Série N, Statistique, N. 19, 1934.

[4]) *Associazione Nazionale per la prevenzione degli infortuni sul lavoro*. Relazione sull'attività dell'associazione nell'anno 1930. Idem, 1931.

[5]) MAURELLI C., « *Indagini statistiche sulle cause e sulla ripartizione degli infor- tuni* » in « Securitas ». Rassegna della Sicurezza e dell'Igiene nell'industria e nel- l'Agricoltura. A. XIX, N. 8, 31 agosto 1932.

[6]) *E. N. P. I. Ente Nazionale di propaganda per la prevenzione degli infortuni*: « Schema per la organizzazione della prevenzione degli infortuni negli stabilimenti ».

vengono assunte come elementi discriminatori la forma e l'entità della liquidazione, si rende necessaria una preventiva classificazione della massa di dati osservati, secondo i tre tipi di liquidazione, corrispondenti all'inabilità temporanea, a quella permanente ed al caso di morte.

Nel caso che si sia prodotta esclusivamente una inabilità temporanea il calcolo dell'indice o saggio di gravità è immediato: basterà operare la riduzione delle giornate di invalidità, che comprendono anche giorni festivi o, comunque, di sospensione del lavoro, in giornate di lavoro effettivamente perdute. A tale scopo, quando l'unità di tempo considerata sia l'anno, viene generalmente adoperato il coefficiente $\frac{300}{365}$.

Le difficoltà nascono per ridurre in termini di tempo i casi di morte e quelli di invalidità permanente. Si assume generalmente, come elemento di ponderazione di ciascun caso mortale o di invalidità permanente *totale*, il numero di giorni che presumibilmente l'infortunato avrebbe vissuto in piena attività lavorativa, a partire dal momento dell'infortunio, ove mai questo non si fosse verificato.

Per quanto riguarda i casi di invalidità permanente *parziale* si formola l'ipotesi che la riduzione di capacità lavorativa prodottasi sia proporzionale alla percentuale che convenzionalmente esprime l'invalidità permanente presentatasi, rispetto a quella totale. Così se l'invalidità residuata viene stimata del 50 % dell'invalidità permanente totale, si ammette che la perdita di attività lavorativa sia anche il 50 % della ulteriore durata media di vita attiva.

Introducendo, allora, le seguenti notazioni:

L = numero delle giornate lavorative dell'intervallo di tempo assunto come termine di riferimento,

G = numero delle giornate totali di tale intervallo,

T = numero complessivo dei giorni di invalidità temporanea,

K = coefficiente esprimente il numero delle giornate di lavoro che in media si ritengono perdute in conseguenza di un infortunio mortale o di un caso di invalidità permanente totale,

P = somma dei saggi di invalidità permanente corrisposti per i singoli infortuni,

M = numero degli infortuni mortali verificatisi nell'intervallo di tempo fondamentale,

N = numero delle ore lavorative dello stesso intervallo,

la formola, generalmente adoperata per il calcolo dell'indice di gravità, è la seguente:

$$Ig = 1000 \frac{\frac{L}{G} T + K\left(\frac{P}{100} + M\right)}{N}.$$

La difficoltà è, ora, nel ricercare la durata in giorni della perdita di ttività lavorativa derivante dagli infortuni mortali, cioè il valore da assegnare al coefficiente *K*.

Secondo uno studio svedese, ricordato dal Bureau International du Travail [pag. 1, (1)] e basato sull'esperienza di quindici anni, è da assumersi valore di 25 anni, pari a 7500 giornate lavorative.

Il citato « Committee on Statistics and Compensation Insurance Cost » ha fatto notare come la « working life expectancy » cioè la ulteriore durata media della vita attiva di un lavoratore sia, data una certa età, minore della durata media di vita deducibile dalle tavole di sopravvivenza americane. Ciò, come è ovvio, dipende dal fatto che l'attività lavorativa dell'operaio può terminare, non solo per morte, ma anche per aver egli raggiunto l'età alla quale abitualmente viene smesso il lavoro. Inoltre ha osservato che, pur mancando dati che consentano di stabilire l'età media alla quale termina la vita attiva di un operaio industriale, è notorio che in America pochi individui continuano il lavoro dopo aver compiuto i 55 anni. Si aggiunge, infine, che l'età media degli operai colpiti da invalidità permanente totale è di circa 42 anni, mentre l'età media delle vittime di casi mortali è di 33 anni. Sulla base di questi dati la Commissione del Bureau of Labor Statistics ha proposto la cifra di 20 anni, pari a 6000 giorni lavorativi, quale valore da assegnare al coefficiente *K*.

Per quanto si riferisce all'Italia, nel 1924 la Direzione Generale del Lavoro, Previdenza e Credito del Ministero dell'Economia Nazionale [1]) sulla base di 1.615 infortuni mortali e di 24.115 casi di invalidità permanente, calcolò per i primi un'età media di anni 37,5 e per i secondi un'età media di anni 34,7. Tenendo conto della vita media lavorativa degli operai, la Direzione Generale adottò due valori distinti per i casi di invalidità permanente e per i casi mortali e fissò rispettivamente i due valori in 8000 e 7300 giornate lavorative.

L'Ente Nazionale Prevenzione Infortuni nel citato « Schema per l'organizzazione della prevenzione infortuni negli stabilimenti » [pag. 2, (6)] consiglia di adottare per il coefficiente *K* il valore unico di 6000 indicato dagli americani.

Anche in un recente studio del Colombo [2]), nel valutare l'attività lavorativa sottratta dal verificarsi degli accidenti mortali e con invalidità

[1]) Ministero dell'Economia Nazionale, Direzione Generale del Lavoro Previdenza e Credito: « *Statistica degli infortuni nell'industria e nell'agricoltura* ». Roma, 1924.

[2]) Colombo C., « *Il problema della prevenzione infortuni nella economia industriale italiana* » in « Securitas », Rassegna della Sicurezza e dell'Igiene nel lavoro. Ediz. dell'Ente Nazionale Propaganda Prevenzione Infortuni, Anno XXIII, N. 7-8, luglio-agosto 1936 XIV.

permanente viene applicato ai dati degli infortuni industriali, avvenuti in Italia nel 1935, il coefficiente di 6000.

2. Da quanto si è fin qui detto appare, anzitutto, che nell'impiego dell'indice di gravità, al coefficiente K vengono assegnati valori desunti da masse di dati molto diverse da quella alla quale l'indice viene poi applicato. Così del coefficiente K, tratto da statistiche di un certo paese, si fa largo uso nel valutare la gravità di masse di infortuni occorsi in Paesi diversi, ove le caratteristiche economiche e le condizioni climatiche, ambientali e specifiche dei vari rami industriali sono totalmente differenti da quelle che hanno esercitato la loro influenza sulla massa di dati, che ha dato luogo a quel certo valore del coefficiente K. Ad esempio, l'Istituto Nazionale Svizzero contro gli Infortuni [1]) ha adottato il valore 6000, dedotto dalle statistiche svedesi; in Italia, come si è visto, viene abitualmente applicato il valore 6000 consigliato dagli americani e fissato ritenendo di 55 anni l'età limite dell'operaio al lavoro, mentre in Italia tale età è certamente più alta. Crediamo di essere molto vicini al vero ammettendo per l'Italia, come età limite, quella di 65 anni.

Nella formola utilizzata usualmente K figura come un parametro costante. In realtà K si può considerare come una funzione dipendente dai casi costituenti la massa esaminata. Parrebbe, dunque, opportuno che, ove si disponesse di un rilevante numero di dati, non ci si limitasse all'applicazione di tali coefficienti « tipo », ma si traessero i valori di K, per i casi mortali e per quelli d'invalidità permanente, direttamente dalla massa osservata.

Inoltre, nelle valutazioni di detto coefficiente, sembra che il calcolo sia stato limitato alla differenza espressa in giornate lavorative tra l'età limite degli operai industriali e l'età media degli infortunati. Ora bisogna tener conto che, ove l'infortunio non si fosse prodotto, non sarebbe stato per ciascun soggetto un evento *certo* (probabilità = 1) il lavorare fino all'età limite (65 anni), ma piuttosto un evento probabilistico, in quanto su ciascun individuo grava una probabilità di morte, funzione della sua età.

Ne consegue che un gruppo di individui, infortunatisi all'età x, non avrebbe mai potuto dare un'attività lavorativa pari a $65 - x$ anni per ciascun elemento, anche se l'infortunio non si fosse verificato; ma può ritenersi che avrebbe dato un numero di anni di lavoro espresso dalla *vita media lavorativa* del gruppo all'età x. Intendiamo per *vita media lavorativa* dei sopravviventi all'età x il numero medio di anni vissuti posteriormente a tale età, con la premessa che a 65 anni il gruppo iniziale risulti estinto.

---

[1]) *Istituto Nazionale Svizzero contro gli infortuni*: Ergebnisse der Unfallstatistik der zweiten Fünfjähringen-Beobachtungsperiode 1923-1927 — Idem 1928-1935 citato da Maurelli C. pag. 2, (1)].

Deducendo dalle tavole di mortalità generali della popolazione [1]) i valori

$$l_x , l_{x+1} , \ldots , l_{64} , l_{65}$$

cioè il numero dei sopravviventi rispettivamente alle età $x , x+1 , \ldots , 64 , 65$ anni, si avranno i seguenti numeri di anni di attività lavorativa, supponendo le morti accentrate a metà anno:

$\frac{1}{2}(l_x - l_{x+1})$ = N.° degli anni di lavoro compiuti posteriormente alla età x dagli individui sopravviventi all'età x e che muoiono nell'intervallo $x \div x+1$ anni.

$\frac{3}{2}(l_{x+1} - l_{x+2})$ = N.° degli anni di lavoro compiuti posteriormente alla età x dagli individui sopravviventi all'età $x+1$ e che muoiono nell'intervallo $(x+1) \div (x+2)$ anni

. . . . . .

$(63,5 - x)(l_{63} - l_{64})$ = N.° degli anni di lavoro compiuti posteriormente alla età x dagli individui sopravviventi all'età di *63* anni e che muoiono nell'intervallo *63* ÷ *64* anni.

$(64,5 - x)(l_{64} - l_{65})$ = N.° degli anni di lavoro compiuti posteriormente alla età x dagli individui sopravviventi all'età di *64* anni e che muoiono nell'intervallo *64* ÷ *65* anni.

$(65 - x) l_{65}$ = N.° degli anni di lavoro compiuti posteriormente alla età x dagli individui sopravviventi all'età di *65* anni e che escono dall'intervallo lavorativo.

Quale espressione della vita media lavorativa si avrà:

$$\mathring{e}'_x = \frac{\frac{1}{2}(l_x - l_{x+1}) + \frac{3}{2}(l_{x+1} - l_{x+2}) + \frac{5}{2}(l_{x+2} - l_{x+3}) + \ldots + (63,5 - x)(l_{63} - l_{64}) + (64,5 - x)(l_{64} - l_{65}) + (65 - x) l_{65}}{l_x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} l_x + l_{x+1} + \ldots + l_{62} + l_{63} + l_{64} + \frac{1}{2} l_{65}}{l_x}$$

Il valore di K sarebbe, quindi, espresso da

$$K = L\mathring{e}'_x$$

[1]) GALVANI L., « *Tavole di mortalità della popolazione italiana* 1930-1932 ». Boll. mens. di Statistica dell'Ist. Centr. di Statistica del Regno d'Italia, dic. 1934, fasc. 12, supplemento alla Gazz. Uff. Regno d'Italia, n. 229 del 21 dic. 1934 - XIII.

ove L sta ad indicare, come s'è detto prima, il numero di giornate lavorative del periodo considerato ed ha abitualmente il valore 300, assumendosi l'anno come riferimento.

Ovviamente poichè l'età media per gli infortuni mortali è in generale diversa dall'età media per gli infortuni con invalidità permanente K assumerà i due valori K' e K'', rispettivamente riferentisi ai due tipi di liquidazione.

L'indice di gravità $I'g$ sarà espresso da

$$I'g = 1000 \frac{\frac{L}{G} T + K' \frac{P}{100} + K'' M}{N} .$$

3. Si potrebbe obbiettare che in tal modo la vita media lavorativa, intesa nel senso precedentemente accennato, interviene nel calcolo una sola volta, essendo essa determinata in base all'età media d'infortunio tratta dall'intera massa osservata.

In effetti il calcolo sarà più rigoroso ove si proceda ad una classificazione della massa che si considera in gruppi decennali o anche quinquennali e calcolate le singole età medie di classe, si determinino le singole durate medie di vita lavorativa corrispondenti. Si potrà, così, ottenere una media ponderata dei singoli valori di K per classi di età, facendo intervenire ciascuna durata media di vita con la frequenza corrispondente.

4. È opportuno notare che, operando come qui si è indicato, ci si avvicina maggiormente ad una definizione razionale, ma resta, tuttavia, ancora un certo errore, in quanto le tavole di mortalità, da cui vengono dedotti gli elementi per il calcolo delle ulteriori durate medie di vita attiva, sono costruite sulla base dei dati della mortalità generale, i quali comprendono anche i casi di morte verificatisi in seguito ad infortunio. Ai fini di un calcolo più rigoroso sarebbe, invece, conveniente disporre di tavole costruite su dati di mortalità depurati dei casi dovuti ad infortunio: da esse potrebbero trarsi con maggiore approssimazione quelle ulteriori durate di vita attiva, che si sarebbero realizzate, se l'infortunio non si fosse prodotto.

A maggior chiarimento si supponga il caso ideale di una popolazione, nella quale la mortalità operi esclusivamente attraverso l'evento infortunistico. La perdita di attività lavorativa dovuta all'infortunio sarebbe data dall'intero intervallo, compreso fra l'età media d'infortunio, x, e l'età limite $x+n$, poichè sarebbe stato certo il raggiungimento dell'età $x+n$, ove mai l'evento non si fosse verificato. Da tavole costruite sull'osservazione di una mortalità così operante bisognerebbe, quindi, eliminare l'effetto totale della mortalità. Ovviamente, l'altro caso estremo sarebbe quello di considerare le morti come non causate *mai* da infortunio.

In mancanza di tavole adatte si può far ricorso a quelle generali della popolazione, in seno alla quale si esegue l'indagine, nella presunzione che l'errore che perciò si commette sia di lieve entità, dato che il numero delle morti da infortunio è esiguo, rispetto alla totalità delle morti.

5. Un'ultima osservazione è ancora da farsi.

Quando si disponga di una massa ingente di dati, questi potranno classificarsi per categoria industriale, per causa d'infortunio, per semplicità o molteplicità di lesione, per sede di lesione, ecc. Può essere, allora, interessante la costruzione di indici specifici che diano misura della gravità differenziale per categoria industriale, per causa d'infortunio, ecc.

In tal caso, per rendere possibile il confronto fra i diversi valori dell'indice, sarà necessario eliminare l'influenza che esercita l'infortunibilità differenziale di categoria industriale, di causa d'infortunio, ecc. Suppongasi, ad esempio, di voler calcolare indici specifici di gravità per sede di lesione. Applicando la formola $I'g$ corrispondentemente al pollice ed all'alluce, si otterranno valori non confrontabili. In questo caso sarà meglio adoperare come denominatore non il numero di ore o il numero di operai-anno, ma il numero di infortuni verificatisi nell'intervallo fondamentale. Ciò equivale ad assumere, quale indice di gravità, la *durata media di infortunio* o, più precisamente, *la perdita di attività lavorativa, in giornate, derivante in media da un infortunio.*

6. A maggior chiarimento delle considerazioni fin qui svolte, si passa a dare esempio di applicazione dei metodi ricordati e di quello consigliato.

Dal complesso degli infortuni denunciati alla R. Liquidazione del Sindacato Infortuni « Assicurazioni Sociali » in Napoli, nell'anno 1930 si sono considerati i casi di infortuni semplici, avvenuti in addetti della categoria industriale « Edilizia ». Trattasi di 1827 casi, per i quali, conservando le notazioni indicate al paragrafo 1, si sono verificati i seguenti valori:

$$L = 300 \quad ; \quad G = 365 \quad ; \quad T = 30.439$$
$$P = 1121{,}5 \quad ; \quad M = 7 \quad ; \quad N = 20.097.600$$

Età media all'infortunio per i casi d'invalidità permanente = 36 anni.
» » » » » mortali = 38 »
» limite degli operai al lavoro = 65 »

Attribuendo al coefficiente K il valore 6.000, indicato dagli americani si ha:

$$Ig = 1000\,\frac{\frac{300}{365} + 30.439 + 6.000\left(\frac{1121.5}{100} + 7\right)}{20.097.600} = 6{,}68.$$

Se invece di far ricorso al coefficiente « tipo » si trae dalla massa osservata il valore di K, si ottengono rispettivamente per gli infortuni con invalidità permanente e per quelli con esito letale, i due valori

$$K = (65 - 36)\ 300 = 8.700$$
$$K = (65 - 38)\ 300 = 8.100$$

e l'indice di gravità sarà dato da

$$Ig = 1000\ \frac{\frac{300}{365} \times 30.439 + 87 \times 1.121{,}5 + 8.100 \times 7}{20.097.600} = 8\,92.$$

Applicando l'espressione $\mathring{e}'_x$ nella determinazione di K, in base alle due età medie di 36 e 38 anni, rispettivamente per i casi di invalidità permanente e di morte, si ha:

$$K' = 300 \times 25{,}51 = 7.653$$
$$K'' = 300 \times 23{,}78 = 7.134$$

e l'indice di gravità sarà dato da

$$I'g = 1000\ \frac{\frac{300}{365} \times 30.439 + 7.653 \times 11{,}215 + 7.134 \times 7}{20.097.600} = 8{,}00.$$

Si voglia, infine, tener conto delle considerazioni esposte al paragrafo 3. A tale scopo si consideri la Tab. A, la quale contiene, e per gli infortuni con invalidità permanente e per quelli con esito letale, tutti gli elementi necessari per determinare i valori che assumono K' e K''.

TABELLA A

CALCOLO DEI VALORI DI « K' » E « K'' »

Classi di età (a)	Frequenze di classe (b)	Età medie all'infortunio (c)	Vita media lavorativa (d)	Prodotti (d) × (b) (e)
INVALIDITÀ PERMANENTE				
meno di 15 a.	—	—	—	—
15-20 a.	10	16,2	42,63	426,30
20-25 »	10	22,8	36,66	366,60
25-30 »	6	26,0	34,12	204,72
30-35 »	6	32,2	28,96	173,76
35-40 »	5	36,4	25,51	127,55
40-45 »	9	41,8	20,33	182,97
45-50 »	7	46,8	16,02	112,14
50-55 »	3	52,0	11,71	35,13
55-60 »	6	56,7	7,37	44,22
60-65 »	3	62,6	1,94	5,82
65 e oltre	1	65,0	—	—
	66			1.679,21

$$K' = 300\,\frac{1.679{,}21}{66} = 7633$$

MORTE				
meno di 15 a.	—	—	—	—
15-20 a.	1	18,0	40,88	40,88
20-25 »	2	22,0	37,50	75,00
25-30 »	—	—	—	—
30-35 »	—	—	—	—
35-40 »	—	—	—	—
40-45 »	—	—	—	—
45-50 »	2	47,5	16,02	32,04
50-55 »	1	50,0	13,44	13,44
55-60 »	1	56,0	8,23	8,23
60-65 »	—	—	—	—
65 e oltre	—	—	—	—
	7			169,59

$$K'' = 300\,\frac{169{,}59}{7} = 7266.$$

Si otterrá

$$K' \quad 7633$$
$$K'' = 7266.$$

L'indice di gravità nella forma corretta sarà espresso da

$$I'g = 1000\,\frac{\frac{300}{365} \times 30.439 + 7.633 \times 11{,}215 + 7.266 \times 7}{20.097.600} = 8{,}03.$$

Concludendo: se si assegnasse al coefficiente K il valore 6000 indicato dagli americani, l'indice assumerebbe il valore di 6,68. Qualora, invece, come è più corretto, si desuma dalla massa stessa il valore di K e si tengano distinti i due casi di invalidità permanente e di morte, si hanno rispettivamente i due valori $K' = 8700$ e $K'' = 8100$. Di conseguenza l'indice di gravità diviene 8,92. Ma neppure questo valore può accogliersi. Quando, infine, viene applicata la formola che comporta l'introduzione nel calcolo della *vita media lavorativa* l'indice di gravità assume il valore 8,03 che può considerarsi definitivo.

Per la storia della prospettiva. — Il «De artificiali perspectiva» e Jean Pèlerin (viator)

Nota della prof. **Maria Da Villa**, *presentata dal socio* **R. Marcolongo**

(Adunanza del dì 6 marzo 1937 - XV)

Sunto. — Si dà notizia di un esemplare della prima edizione del *De Artificiali erspectiva* che si trova alla Biblioteca Vaticana; se ne mette in rilievo il valore bliografico e si aggiungono alcuni cenni biografici sull' Autore.

Fin dal principio del XIX secolo il Panzer indicava rarissima [1]) la rima edizione del *De Artificiali Perspectiva* di Jean Pèlerin, stampata a oul nel 1505. Presentemente gli esemplari esistenti sono pochissimi [2]): uno alla Biblioteca Pubblica di Nancy [3]), un altro alla Biblioteca Nazionale i Vienna e due, dei quali uno privo di un foglio, sono al British Museum i Londra [4]). In quanto all' esemplare cui si riferiva il Panzer nei suoi nnali, non ho avuto modo di verificare se esso esiste oggi distintamente a quelli sopra indicati; però a questi possiamo aggiungerne un altro che o trovato alla Biblioteca Vaticana e che non mi consta noto agli studiosi el *De Artificiali Perspectiva*.

Esso proviene dalla biblioteca del Conte Cicognara, è abbastanza ben

---

[1]) «Opus rarissimum — Collectionis nostrae exemplum, optime servatum, extabat olim in bibliotheca Wenczel Jamiczer». *Annales Typographici*. Norimberga, 1803 (XI, anno MDV, p. 509).

[2]) G. Clanché, *Le chanoine Jean Pèlerin (Viator)* .Auter de la «*Perspective aristique*» (1445-1524). Ses travaux à Toul, Nancy, Société d' impressions Typographique, 1928, pag. 26 nota (1): «Opera al giorno d' oggi quasi introvabile».

[3]) Anatole de Montaiglon in «*Notice historique et bibliographique sur Jean Pèlerin dit le Viateur*», Paris, Librairie Tross, 1861, pag. 21 afferma che, dopo la scomparsa dell' esemplare che nel 1785 si trovava alla Biblioteca di Sainte-Geneviève, non ci sono altri esemplari in Francia, che egli sappia, all' infuori di quello della Biblioteca di Nancy, acquistato per 315 franchi nell' ottobre del 1845, alla vendita Cailhava, per cura di M. Beaupré. E in nota il de Montaiglon aggiunge che nel 1740: «Il y en avait aussi un exemplaire dans le Catalogue de la Bibliothèque du Marèschal D' Estrèes».

[4]) British Museum Catalogue of Printed Books, Tomo 45, p. 139. «(Another copy) Imperfect; wanting the first leaf of the French version».

conservato, con rilegatura antica in cuoio, ma non è completo, risultando mancante di sei fogli [1]).

Benchè sia smarrito proprio il foglio contenente il luogo e la data di stampa, possiamo esser sicuri che questo esemplare appartiene all'edizione del 1505. Infatti, oltre ad essere inconfondibile con le altre edizioni per la disposizione del testo latino, della versione francese e dei disegni, e oltre a corrispondere esattamente alla descrizione fattane da vari autori [2]), non differisce dall'esemplare conservato alla Biblioteca di Nancy [3]).

La prima edizione del *De Artificiali Perspectiva* Tulli 1505 — piccolo volume in folio — è effettivamente di 46 fogli di cui 42 divisi in cinque quinterni (i primi quattro di otto fogli ciascuno, il quinto di dieci) contrassegnati con lettera da *A* ad *E*, e gli ultimi quattro fogli senza nessun contrassegno, contenenti la traduzione francese.

L'esemplare della Biblioteca Vaticana ha invece soltanto 40 fogli, e i sei mancanti sono:

1. il primo foglio – foglio del frontispizio — (contrassegnato con A_i) sostituito con un altro che porta manoscritte le parole « De Perspectiva positiva » copiate evidentemente dal primo foglio del testo che ha l'intitolazione: « De Perspectiva positiva: Compendium »;

2. il terzo foglio — secondo del testo latino (A_{iii}) — (dalla parola « premissum » alla parola « aut »);

3. il sesto foglio contenente tre disegni di pavimenti;

4. il trentatreesimo foglio — (E_i) — contenente pure un disegno;

5. il quarantaduesimo foglio che, oltre la sottoscrizione « Impressum Tulli Anno Catholicae veritatis Quingentesimo quinto supra Millesimum: ad nonum Calendas Julias. Solerti opera Petri Jacobi presbyteri, Incole pagi Sancti Nicolai » porta altre linee di testo e termina con le parole « Fides ficit » che stanno a destra di una croce, alla sinistra della quale si trovano alcune note di canto gregoriano;

---

[1]) Nel « Catalogo Ragionato dei libri d'arte e d'antichità già posseduti dal Conte Cicognara, 1821 (1, p. 160) si avverte già che questa copia è mutilata, ma non si dice in che modo.

[2]) La carta ha anche la stessa filigrana indicata dal DE MONTAIGLON (O. c., p. 24); una testa di bue tagliata da una retta con due linee incrociate a X. Cf. oltre A. DE MONTAIGLON (O. c.): G. W. PANZER (O. c.); M. BEAUPRÉ, *Recherches Historiques et Bibliographiques sur les commencements de l'imprimerie en Lorraine et sur ses progrès jusqu'à la fin du VII^e siècle.* Nancy, 1845; Id., *Nouvelles recherches de bibliographie lorraine.* Nancy, 1853.

[3]) Nella descrizione della prima edizione del *De Artificiali Perspectiva* e nei raffronti che seguono mi sono riferita all'esemplare della Biblioteca di Nancy, del quale ho avuto fotografie e notizie dalla cortesia di quel Bibliotecario principale.

6. Il quarantaseiesimo foglio — l'ultimo, che finisce con le parole nis — Laus Deo » [1]).

In questo esemplare il testo latino non è integro, ma essendo completa ersione francese possiamo avere ugualmente la conoscenza del pensiero tenuto nella prima edizione del *De Artificiali Perspectiva*; dalla quale, resto, non differiscono sostanzialmente nè la seconda edizione del 1509, la terza del 1521. Trascurando infatti le differenze formali [2]), possiamo rmare che le due ultime edizioni differiscono dalla prima soltanto perchè esse vi è qualche periodo e qualche frase in più, che non aggiungono ò nulla di nuovo, ma che servono a dare maggior chiarezza alle idee l'Autore, insieme a pochi disegni che mancano nella prima edizione e intercalano il testo, il quale ne fa il richiamo esplicito.

Nelle due ultime edizioni, inoltre, le tavole delle figure sono un po' di-se: qualcuna nuova, qualche altra lievemente modificata e, curioso, sotto ogni figura compare un distico che si adatta al soggetto e che manca l'edizione del 1505 [3]).

Tra loro poi, le edizioni del 1509 e del 1521 sono molto simili: solo alche variante nelle figure e qualche trasposizione di queste [4]). Si può

---

[1]) Secondo J. Ch. Brunet, (*Manuel du Libraire et de l'Amateur de Livres*, Paris, 54, tome V, p. 1169) in qualche esemplare della prima edizione, il 46° foglio è nco, oppure manca del tutto. Tale affermazione è ripetuta anche da G. Save in *Pèlerin-le Viateur*, typo L. Humbert, 1897 (in Bulletin de la Société Philoma-ue Vosgienne, Vol. XXII, Année 1896-1897, pp. 65 e segg.).

[2]) Nella seconda e terza edizione il testo latino è intercalato dalla versione ncese, periodo per periodo, mentre nella edizione del 1505 vi è prima il testo ino, e alla fine, dopo i disegni, ci sono i tre fogli con la traduzione francese. oltre nella prima edizione le tavole dei disegni sono stampate solo nel recto, e lle due ultime, invece, nel recto e nel verso. Il formato della 3.ª edizione è un co più grande di quello delle altre due. Alcuni fogli della 2.ª edizione portano in igrana un cuore sormontato da una croce; e nella 3.ª edizione non c'è filigrana.

Per una minuziosa descrizione delle tre edizioni vedasi A. de Montaiglon O. c

[3]) Per es.: sotto alla tavola B_3, recto, (seconda edizione) che rappresenta una mera, si leggono i versi:

Ci voit-on la propre figure
D' une chambre et sa garniture;

alla tavola C_4 recto, rappresentante la facciata di una chiesa:

Sur la memoire de l' église
D' Angers cette forme fut prise.

[4]) L'edizione del 1509 consta soltanto di 29 fogli e quella del 1521 di 30. Le avole di soli disegni sono 37 nella prima e nella seconda edizione, e 38 nella terza dizione. Nella seconda edizione al solito titolo *De Artificiali Perspectiva, Viator*, è

dire che la maggior differenza sta nella prima pagina della terza edizione, dove, sotto il titolo, sono stampati diciotto versi francesi [1]) che non si trovano nelle altre edizioni.

Del *De Artificiali Perspectiva* e di J. Pèlerin molti hanno parlato e sempre con entusiasmo, ma la critica moderna si è poco occupata del libro dal lato scientifico e scarse sono state le notizie biografiche dell'autore, prima delle pubblicazioni del Save e del Clanché [2]).

Pur mancando anche oggi una biografia completa, sappiamo che il Viator era di Bois-Jouan (in Vandea) [3]) appartenente allora alla Diocesi di Maillezais [4]). L'anno di nascita non è precisato: deve aggirarsi intorno

---

aggiunta la parola *Secundo*: e nella terza edizione si legge la seguente intitolazione: *de Artificiali Perspectiva Viator* Ter°.

Le due ultime edizioni sono meno rare della prima. A Roma si trovano alla Biblioteca Vaticana e la terza edizione anche alla Biblioteca Nazionale Vittorio Emanuele II.

[1])

O bons amis, trespassez et vivens,
Grans esperiz, zeusius, apelliense,
Decorans france, almaigne, et italie
Geffelin, paoul, et martin de pavye,
Berthelemm fouquet, poyet, copin,
Andrè montaigne, et damyens colin,
Le pelusin, hans fris, et leonard
Hugues, lucas, luc, albert, et benard,
Jehan jolis, hans grun et gabriel
Vuastele, urbain et lange micael
Symon du mans: Diamans margarites,
Rubiz, saphirs, smaragdes, crisolites,
Ametistes, iacintes, et topazes,
Calcedones, asperes, et a faces,
Jaspes, berils, acates et cristaux
Plus precieux vous tiens que telz ioyaux
et tous autres nobles entendemens
Ordinateurs de specieux sigmens.

[2]) Brevissimi i cenni nella « *Histoire de la Lorraine* », Nancy 1745, di Calmet Augustin, (IV, p. 719), tratti dal P. Benoît Picart, *Histoire ecclésiastique et politique de la ville et du Diocèse de Toul*, Toul 1707, pp. 695 e segg.; e limitati, sebbene meno dei precedenti, quelli del de Montaiglon (O. c.). Cf. G. Clanché, O. c.

[3]) Oggi appartenente al Comune di Coron (Maine-et-Loire) sul ruscello de Corail (Coriloni). Cf. Clanché, O. c.

[4]) Ovvero Malleacen. In una tavola della prima edizione del *De Artificiali Perspectiva* raffigurante una entratura dove vi è appeso un bastone ed una borsa

1115 giacchè il Nostro affermava nella edizione del 1505 del suo *De Artificiali Perspectiva*, che mentre scriveva il libro stava percorrendo la sesta decade [1]). Sappiamo anche che abbracciò la carriera ecclesiastica, studiò diritto e nel 1467 fu licenziato ad Angers o a Poitiers e gli fu affidata la giurisdizione di Thiors (presso Thouars, sul limite tra la Touraine e l'Anjou), ma vi rimase poco, perchè ebbe subito inizio quello che doveva caratterizzare buona parte della sua vita, la mutabilità cioè di incarichi e uffici a lui affidati, mutabilità che lo obbligò a viaggiare continuamente, per cui fu che gli si addice il soprannome di Viator [2]).

Nominato nel 1470 segretario di Nicolas D'ANJOU, detto di Calabre, marchese di Pont-à-Mousson, in settembre dello stesso anno ricevette da Luigi XI il Priorato di Nôtre-Dame-de Saint-Cyr in Tolmondais (Viscontea di Thouars); indi nel 1471 fu inviato a Nancy per conto di Nicolas D'ANJOU; nel 1472 a Loudun per affari di Luigi XI, e nel 1473, dopo aver lasciato il suo Priorato in conservandone certe rendite, fu chiamato come segretario e cappellano presso Philippe DE COMMINES, col quale venne in Italia nel 1475 quando il DE COMMINES ne fu designato ambasciatore. Ma l'anno dopo il PÈLERIN scorta come ciambellano Renato II a Saint-Diè e nel 1478 lo ritroviamo in Italia presso il DE COMMINES (allora in Toscana) che lo nomina alla Cappellania della Métrelle a Saint-Cyr, mentre poco dopo Renato II gli dà un canonicato a Saint-Diè [3]), che tramuta a breve distanza nella prebenda di Saint-Georges di Nancy. Quivi il Viator pronuncia il panegirico di Luigi XI, diventa professore di teologia del Capitolo, e verso il 1487 vi fa rappresentare il Mistero di Saint-Georges.

Nel 1490 riceve la cura d'Autrey (presso Thelod) e poi va in Francia

---

da pellegrino si legge MALLEACEN, cioè de MAILLEZAIS. Nella terza edizione la sottoscrizione del titolo è: *De Bosco Joannis-Coriloni-Malleacensis*, sormontata dalle parole: Vicus-Fons-Diocesis.

[1]) ... du pourtraiant percurrent la sixième decade; cf. CLANCHÉ (O. c.) (poco prima del 1445).

[2]) Secondo il DE MONTAIGLON, (O. c., p. 11) Jean PÈLERIN si è preso questo soprannome per i suoi frequenti viaggi, e perchè la parola Viator richiamava il senso del suo cognome (PÈLERIN, lat. Peregrinus).

[3]) Da poco era stata posta alla Collegiale Saint-Georges di Nancy una lastra di bronzo a ricordo della grande disfatta di Carlo il Temerario (1477). Sotto il bassorilievo rappresentante il Duca di Lorena, vincitore, vi si leggevano questi due versi a firma Viator:

Ereptam Patriam dux ensifer ense recepit
qui divina fovens Iuris
Amator erat.
(CLANCHÉ, *O. c., p. 12*).

con Renato II. Pare [1]) che verso questa epoca (cioè fra il 1490 e il 1491) egli ottenga un canonicato alla Cattedrale di Toul. Nel 1495 visita la Germania; nel 1500 è di ritorno in Francia con Renato II.

Forse dopo questa data, la dimora del Viator a Toul diventa stabile o quasi; noi almeno non abbiamo indicazioni di viaggi importanti fatti da lui nel secolo XVI.

A Toul il Viator conobbe gli artisti che lavoravano dal 1460 all'erezione del magnifico portale della Cattedrale, e pare anzi che sia composto da lui l'epitaffio del maestro delle opere di Toul: Jacquemin Hogier, e che egli si sia pure occupato del legname del campanile e dei pavimenti della Cattedrale stessa. Nel 1502 il Viator è incaricato della direzione amministrativa della Maison-Dieu, vecchio ospedale di Toul, e nel 1512 detta dei versi per la tomba di S. Mansui, primo vescovo di Toul [2]). Sembra poi, che la stamperia in cui fu pubblicata la *Perspectiva*, fosse posta nella dimora del Viator, e fosse condotta da Jacobi, come la stamperia di Saint-Dié era installata nella casa del Canonico Lud e condotta da Ringmann [3]).

Oltre il *De Artificiali Perspectiva*, il Pèlerin scrisse un lavoro su Tolomeo il Geografo che non fu stampato e pare sia andato perduto [4]); una traduzione del libro di Giobbe col titolo: « Texte de Hiob... » [5]), e poi, nel 1511, una grande Tavola generale e universale in latino, scoperta da Léon Germain de Maidy studiando il viaggio di Pierre Le Monnier in Lorena,

[1]) Le lacune esistenti nei registri capitolari di Toul, dal 1476 al 1500 (Clanché O. c, p. 15) non ci permettono di avere notizie precise intorno al primo periodo di soggiorno di J. Pèlerin a Toul; in particolare di sapere quando veramente egli diventa canonico di quella città.

[2]) *Ici dessous fut mis gésir en terre*
Saint-Mansui disciple de Saint-Pierre,
Qui suscita par devote prière
Les fils du Roi noyé en la rivière,
Et la Cité et Pays convertit,
En un seul Dieu, Père, Fils, e Saint-Esprit,
Le quel veüille garder notre raison
Nos âmes, corps, biens, labeur et maison,
et nous mêmes par bonne et longue vie
Au vrai salut e liesse infinie. Amen
Joannes Peregrinus viator posuit an 1512 (Clanché, *O. c., p. 44*).

[3]) Cf. Save, O. c., pp. 40-43.

[4]) Calmet, O. c., p. c.

[5]) *Texte de Hiob translaté selon la verité hebraïque, et bref commentaire du Viateur sur icelluy*, cf. Clanché, O. c., pp. 17 e 18.

rattante della vera filosofia divina e morale e delle arti e delle scienze berali [1]).

Il Pèlerin morì a Toul il 1.° febbraio 1523 (1524 n. s.) [2]).

Le notizie biografiche che qui ho riportato, mostrano che il Viator ha vuto una grandissima attività nei campi più diversi, che il suo multiforme ngegno ben merita gli elogi dei contemporanei e dei posteri, che è naturale l rimpianto del Clanché nel vedere oggidì questo autore quasi dimenticato opratutto a Toul, ma esse non ci dicono che il Viator sia stato uno studioso delle matematiche. Quindi si capisce che il *De Artificiali Perspectiva* ion possa essere un libro scientifico e che non si possa trovare in esso alcun enno di dimostrazione dei procedimenti seguiti. Basta leggere, infatti, poche ighe per accorgersi, dal linguaggio usato, dal modo di descrivere le costruzioni prospettive, che l'Autore non aveva coltura geometrica e che deve itenersi come vera e non dettata da modestia, come vorrebbe il Save [3]), la sua esplicita confessione di aver ricavato i principî della prospettiva da *libri e opere e responsi degli espertissimi in questa materia*. Empirico, dunque, questo libro, non perchè l'Autore vuole che sia così, ma perchè non sa fare diversamente. Strano che il Viator, non matematico, non pittore, si sia occupato di prospettiva. Ma egli stesso ce ne dà la spiegazione con le seguenti parole del testo:

« Le quel euvre nest de main de paintre mais de qui ayme les paintres et artisans e tous vivans ».

Da ciò si vede che J. Pèlerin ha compilato il *De Artificiali Perspectiva* solo perchè amava pittori e artisti. Egli forse aveva compreso quanto bisogno pittori e artisti avessero, nell'arte loro, di una guida che fosse alla portata di tutti e che in quei tempi mancava, e aveva voluto venir loro in aiuto, raccogliendo quanto si sapeva della prospettiva e riportando e inventando

---

[1]) *Léon Germain de Maydy, Note sur le voyage de Pierre Le Monnier en Lorraine*, 1610, in *Journal de la Société d'Archéologie Lorraine*, 1900, pp. 17-19.

[2]) Il 23 ottobre 1523 il Pèlerin è presente al Capitolo, e ciò risulta dagli atti Capitolari, e il 10 febbraio 1524 (n. s.) si dà lettura del testamento e in quella data si trova scritto negli atti stessi: « Obitus M. Jo. Peregrini », ma già in data 1.° febbraio c'è la nomina di Nicolas Rogeti a successore del Viator nella sua prebenda. Cf. Clanché, O. c., pp. 62 e 63 nota (2).

Il P. B. Picart riporta l'epitaffio seguente:

Venerabili domini Joanni Peregrino — Victori Andegavo - hujus ecclesiae canonico — regis quondam secretario — perspectivae artis acutissimo indagatori - doctrina et moribus perspicuo — virginumque virtutum fulgore clarissimo — Robertus Joannetus etiam canonicus — discipulus, benefactori suo, posuit 1523 — prima februarii (Calmet, O. c., p. c.).

[3]) O. c., p. 70.

disegni che servissero da esempi. Veramente ai suoi tempi il Pèlerin era passato per un « acuto indagatore della prospettiva »[1]) e forse non a torto, perchè era necessaria acutezza d'ingegno per fare, impreparato scientificamente, il faticoso lavoro di esame e di raccolta di disegni e, forse, per ricavare da questi un metodo generale di esecuzione. Però non possiamo conoscere esattamente l'estensione della sua opera personale di generalizzazione e quindi la misura del suo merito, perchè non conosciamo le fonti cui attinse. Di queste il Viator non fa parola neppure dove confessa di aver tratto da altri i principî che espone:

« Le quel euvre nest de main de paintre mais de qui ayme les paintres « et artisans et tous vivans; qui aux queraus les principes de la perspective « dessuld d', quels il a peu consuyr des livres, euvres, e oracles ou colla- « tions de très peritz, passant par les fins de Lorraine a volu et este cu- « rieux mettre par escript ».

Ma se il Viator non è l'inventore di ciò che scrive, e in particolare del metodo dei punti di distanza, ha però il merito di essere il primo scrittore che tratta di tale metodo, in forma rudimentale, è vero, e in casi particolarissimi, ma con una terminologia che è giunta fino a noi quasi invariata. Nel *De Artificiali Perspectiva* noi troviamo, infatti, per la prima volta, usati i punti di distanza come punti di fuga delle rette orizzontali inclinate di 45° sul quadro.

È interessante esaminare il testo, ciò che farò in una prossima nota.

[1]) Cf. nota [2]) p. 7.

Le variazioni delle latitudini rilevate nell' anno 1936. Risultati provvisorii dedotti dalle osservazioni delle Stazioni boreali

Nota del socio corrispondente **L. Carnera**

(Adunanza del dì 3 aprile 1937 - XV)

Sunto. — Si espongono i metodi usati per calcolare le osservazioni fatte nelle stazioni boreali, ed i risultati che da queste si sono ottenuti.

Affidato fin dal principio dell' anno 1936 a questo Osservatorio astronomico di Capodimonte il compito di coordinare e calcolare le osservazioni seguite nelle otto stazioni internazionali per lo studio delle variazioni delle latitudini, grazie all' ospitalità accordatami dal chiar. Direttore prof. F. Kohlschuetter dell'Istituto Geodetico Prussiano di Potsdam, onde vedere colà l'organizzazione data ai loro tempi dai prof. Helmert, Albrecht e Wanach al primo Ufficio Centrale, nonchè all' aiuto pervenutomi tempestivamente dal prof. Kimura, che cortesemente volle comunicarmi fin dall'autunno 1935 i valori delle costanti strumentali, e le posizioni medie ed apparenti delle stelle osservate, è stato possibile procedere all'immediato calcolo provvisorio delle osservazioni, e dedurre quindi, in prima approssimazione, la traiettoria descritta dal Polo. Mentre pertanto rinnovo qui pubblicamente i più vivi ringraziamenti agli illustri proff. Kohlschuetter e Kimura per l'aiuto prestatomi, comunico i risultati tratti dalle osservazioni delle stazioni boreali, avvertendo, che in tutta questa trattazione ci si è attenuti alle identiche direttive seguite negli ultimi rapporti annuali dal prof. Kimura.

Durante il decorso anno sono state in attività nell' emisfero nord le stazioni di Mizusawa, Kitab, Carloforte, Gaithersburg ed Ukiah. Le condizioni climatiche sono state su per giù normali, salvo a Carloforte ove l'inverno è stato particolarmente infelice. Gli osservatori ed il numero complessivo delle coppie osservate risulta dal quadro seguente:

Mizusawa	M. Jamasaki ed S. Kawasaki	1059
Kitab	G. Senjutovitch ed L. Schtschirgezky	1545
Carloforte	E. Martin e T. Nicolini	1638
Gaithersburg	E. L. Williams	1348
Ukiah	H. G. Wrocklage	1524

Nessuna variazione è stata introdotta nè ai programmi di osservazione,

nè agli strumenti durante il corso dell'anno, onde fu possibile usare nella riduzione delle osservazioni costanti quasi identiche a quelle usate dal prof. Kimura. Riservandoci utilizzare in seguito, e particolarmente nei computi definitivi, i valori delle costanti strumentali, che via via nel corso dell'anno ci sono stati comunicati dalle diverse stazioni, si è dovuto rettificare il valore primitivamente assunto per il passo del micrometro della Stazione di Gaithersburg, che si era dimostrato sistematicamente erroneo Dalle osservazioni fatte nelle altre quattro stazioni durante i mesi di gennaio e febbraio, si è ricavata dapprima la correzione da apportare alle declinazioni di ciascuna coppia dei gruppi IV-V-VI onde ridurre i risultati di ciascun gruppo concordati fra di loro, e con le declinazioni così corrette, e con le differenze micrometriche osservate a Gaithersburg, si è dedotta la correzione incognita del passo. Partendo dal valore $R = 39''.685$, si è trovata la correzione $dR = -''.0496$. I valori adottati per le riduzioni delle osservazioni in questo primo anno furono i seguenti:

Mizusawa	$R = 39''.9393$	liv. I	:	$0^R.02951$	liv. II	:	$0^R.03378$
Kitab	$R = 39\ .7580$	liv. I		$0\ .02435$	liv. II		$0\ .02264$
Carloforte	$R = 39\ .7372$	liv. I		$0\ .02534$	liv. II		$0\ .02447$
Gaithersburg	$R = 39\ .6354$	liv. I		$0\ .02544$	liv. II		$0\ .02611$
Ukiah	$R = 39\ .7528$	liv. I		$0\ .02862$	liv. II		$0\ .02657$

Si tenne conto invece delle recenti determinazioni degli errori delle viti micrometriche, conglobando i nuovi valori con quelli precedentemente segnalatici dal prof. Kimura, accordando però opportuni pesi. Anche per questi ci si riserva uno studio più accurato nelle riduzioni definitive.

Onde attenuare gli effetti della imperfetta conoscenza delle declinazioni stellari nelle serate, in cui essendo stato il cielo solo parzialmente sereno non era stato possibile osservare tutte le coppie di ciascun gruppo, si è tratto dal complesso delle osservazioni di tutte le stazioni delle correzioni medie onde ricondurre le latitudini di ciascuna coppia stellare al valore medio di ciascun gruppo.

Le due tabelle seguenti dànno per ciascuna stazione e ciascun gruppo:

1. l'epoca media, espressa in centesimi di anno, dell'osservazioni
2. il numero delle coppie osservate der ciascun gruppo
3. la latitudine istantanea risultante.

La prima tabella si riferisce al gruppo osservato nelle ore della sera, la seconda a quello delle ore del mattino.

Tabella I e II

Dai valori delle precedenti tabelle si trassero le differenze rispetto alla latitudine media φ_0, continuando ad assumere per essa gli antichi valori

usati prima dall' Albrecht e Wanach, e poi dal Kimura, e con i valori e $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ si calcolarono al solito modo le coordinate istantanee x / del Polo, che si trovano nella tabella III, distinguendo i valori a seconda derivati dalle osservazioni del gruppo serale o del gruppo mattutino. ue nella tabella il gruppo delle colonne contenenti i valori tratti ana_ amente per il terzo termine $\Delta\delta'$, che rappresenta essenzialmente la rezione delle declinazioni del gruppo, ma in cui vi è pur compresa la te di variazione periodica del termine z, comune ed eguale per tutte stazioni. L' ultima colonna ci dà il numero complessivo di coppie con_ érate per ricavare quei valori.

Tabella III.

Seguendo poscia ancora i procedimenti del Kimura, dalla polodia risul_ ıte dalle x ed y medie della precedente tabella si sono ricavati i residui il φ osservato, e quello calcolato, e con essi, per ciascuna stazione, si proceduto al calcolo dei termini periodici, che costituiscono il termine z. r la parte, che rappresenta la variazione locale della latitudine nell'in_ vallo di tempo che trascorre fra l'istante medio del gruppo serale e quello alogo del gruppo del mattino, si trovarono i seguenti valori:

	1933	1934	1935	1936
Mizusawa	— 0″.040	— 0″.002	+ 0″.003	— 0″.034
Kitab	— .009	— .013	— .028	— 0 .031
Carloforte	— .009	— .025	— .010	— 0 .014
Gaithersbutg	— .043	— .038	— .013	— 0 .030
Ukiah	— .021	— .015	— .022	— 0 .006

Se si tien ora conto che i valori corrispondenti al 1933 sono tratti dalla scussione delle osservazioni di tre anni, e si accorda perciò ad essi un peso iplo, i valori medi del Kimura sono rispettivamente: —0″.024; —0″.014; 0″.012; —0″.036 e —0″.020, in buon accordo con quelli ora trovati per 1936.

Corrette allora le latitudini osservate con questi valori, servendosi dei sidui si è passati al calcolo delle costanti dei termini periodici locali dicati dal Kimura con r_2 ed A_2, ottenendo i seguenti valori:

	1933		1934		1935		1936	
Mizusawa	+ ″.016	+18°	+ ″.030	+10°	+ ″.063	—28°	+ ″.065	—10°
Kitab	+ .073	+32	—	—	+ .031	— 3	+ .080	+24
Carloforte	— .005	0	+ .021	—30	+ .025	—36	+ .035	— 3
Gaithersgurg	+ .056	+28	+ .037	+ 6	+ .009	+16	+ .038	—55
Ukiah	+ .065	—10	+ .034	+10	+ .025	+ 9	+ .030	—63

Anche questi valori da noi ricavati per il 1936 non differiscono sensibilmente da quelli trovati dal KIMURA per gli anni precedenti. Servendoci di essi vennero ulteriormente corrette le latitudini osservate da ciascuna stazione, ottenendo valori scevri dalle variazioni periodiche locali (ossia della parte del termine z avente carattere periodico locale), e con essi si procedette alla nuova e più esatta deduzione delle coordinate istantanee del Polo. Le nuove x ed y, che così si ebbero, sono riportate nella tabella seguente, che contiene pure i terzi termini $\Delta\delta$, che rappresentano ora con molto maggiore attendibilità le correzioni delle declinazioni stellari medie di ciascun gruppo.

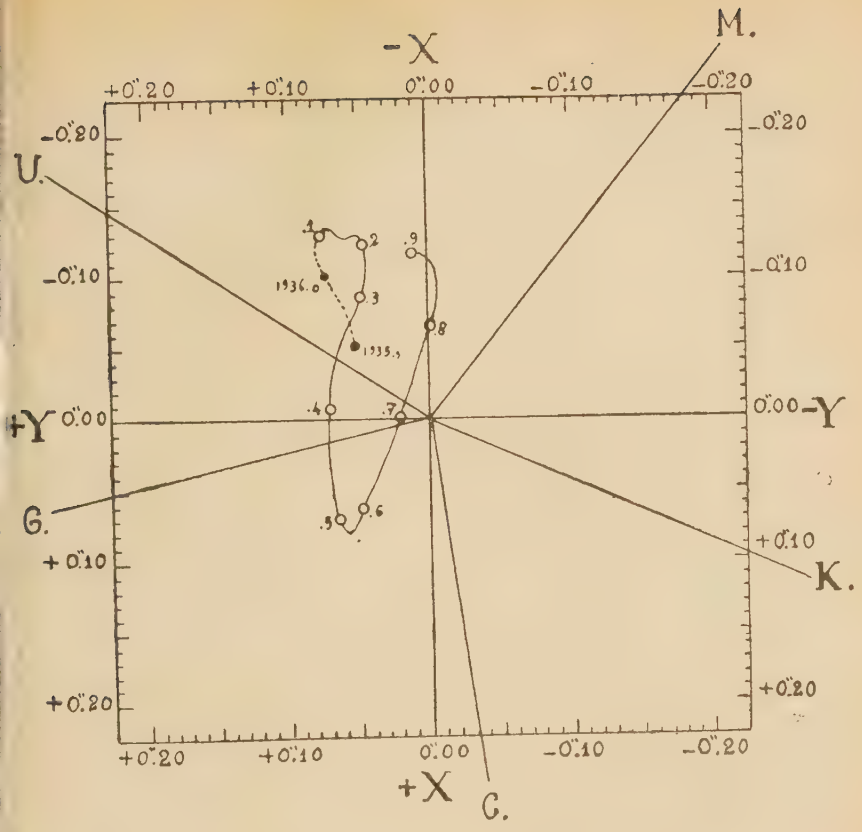
Tabella IV.

Nell'ultima colonna della precedente colonna sono riportate le differenze che presentano i $\Delta\delta$ a seconda che risultano dedotte da osservazioni fatte nelle ore serali o del mattino: l'ordine di grandezza di queste differenze risulta ancora identico a quello trovato negli anni precedenti dal KIMURA, mentre i $\Delta\delta$ stessi si accordano perfettamente con quelli trovati nel 1935 come risulta dalla seguente tabella.

Tabella V.

Dalla rappresentazione grafica delle coordinate medie x ed y contenute nella tabella IV, raccordando i punti mediante curve, si è tratta la traiettoria descritta dal Polo, che è riprodotta nella figura, e le seguenti coordinate x ed y del Polo di decimo in decimo di anno:

1936.	x	y
.0	— ″.10	+ ″.07
.1	— .13	+ .08
.2	— .12	+ .05
.3	— .08	+ .05
.4	— .01	+ .07
.5	+ .07	+ .06
.6	+ .06	+ .05
.7	.00	+ .02
.8	— .06	.00
.9	— .12	+ .01
1937.0	(— .15)	(+ .06)



Servendosi di questi valori si è calcolata infine la tabella numerica seguente, che dà le variazioni della latitudine per i diversi meridiani dedotti dalla polodia, ricavata dalle osservazioni del 1936 fatte nelle stazioni internazionali dell'emisfero boreale.

Tabella VI.

Il lungo e paziente lavoro di calcolo delle latitudini osservate è stato eseguito sotto la sorveglianza continua e diligente del Prof. Ing. Paolo Vocca, cui va perciò il maggior merito, dalle Signorine Vincenza Esposito ed Elena Pisano, coadiuvate negli ultimi mesi, dalle Signorine Adelaide Chiarazzo ed Adriana De Maria, alla quale poi particolarmente si devono i calcoli per la deduzione dei risultati di prima approssimazione della polodia.

Napoli, Osservatorio Astronomico di Capodimonte, 28 marzo 1937 - XV.

TABELLA I. — *Coppie serali*

Gruppo	Mizusawa $\varphi_0 = 39°8'\ 3''.48$			Kitab $\varphi_0 = 39°8'\ 1''.76$			Carloforte $\varphi_0 = 39°8'\ 8''.97$			Gaithersburg $\varphi_0 = 39°8'\ 13''.27$			Ukiah $\varphi_0 = 39°8'\ 12''.11$		
	1936	Num. oss.	φ	1936	Num. oss.	φ	1936	Num. oss.	φ	1936	Num. oss.	φ	1936	Num. oss.	φ
IV	.06	29	3''.720	.05	48	1''.787	.06	11	8''.869	.06	47	13''.541	.06	54	12''.353
V	.14	68	.409	.14	22	.621	.14	24	.764	.15	61	.249	.15	48	.147
VI	.22	37	.541	.21	54	.704	.23	69	.955	.22	37	.384	.22	58	.358
VII	.31	70	.455	.29	55	.690	.32	54	.855	.30	68	.314	.31	36	.247
VIII	.39	50	.304	.39	102	.597	.39	75	.851	.39	98	.257	.38	54	12 .078
IX	.46	44	.165	.46	112	.490	.50	53	.785	.47	57	.145	.48	72	11 .927
X	.55	40	.212	.56	93	.648	.56	147	.873	.55	63	.165	.56	88	12 .016
XI	.62	32	.528	.64	94	.877	.64	159	.995	.63	38	.415	.64	90	.138
XII	.73	43	.590	.72	78	.884	.72	132	8 980	.73	65	.328	.72	84	.164
I	80	65	.621	.79	66	.886	.81	64	9.030	.81	53	.391	.81	78	.243
II	88	38	.465	.86	30	.779	.88	70	8.775	.89	63	.112	.89	60	.050
III	.97	58	.656	.97	32	.850	.98	68	9.033	.97	54	.482	.97	54	.378
Numero totale coppie osservate	574			786			926			704			776		

TABELLA II. — *Coppie del mattino.*

Gruppo	Mizusawa $\varphi_0 = 39°8'\ 3''.48$			Kitab $\varphi_0 = 39°8'\ 1''.76$			Carloforte $\varphi_0 = 39°8'\ 8''.97$			Gaithersburg $\varphi_0 = 39°8'\ 13''.27$			Ukiah $\varphi_0 = 39°8'\ 12''.11$		
	1936	Num. oss.	φ	1936	Num. oss.	φ	1936	Num. oss.	φ	1936	Num. oss.	φ	1936	Num. oss.	φ
V	.06	23	3''.430	.05	46	1''.575	.06	6	8''.813	.06	56	13''.271	.06	50	12''.117
VI	.14	63	.567	.14	23	.773	.13	6	.963	.15	33	.466	.15	48	.384
VII	.22	30	.600	.22	53	.729	.23	49	.859	.22	47	.356	.22	47	.288
VIII	.31	57	.361	.29	56	.607	.33	38	.891	.30	63	.316	.30	34	.188
IX	.39	50	.221	.39	96	.477	.39	57	.675	.39	92	.215	.38	48	.022
X	.46	27	.262	.47	111	.621	.50	47	.911	.48	61	.273	.48	72	.045
XI	.55	39	.391	.56	93	.772	.56	128	8.981	.55	64	.388	.56	88	.143
XII	.62	26	.463	.65	89	.907	.64	147	9.010	.63	31	.451	.65	90	.156
I	.74	30	.643	.72	72	.895	.72	113	9.034	.73	46	.431	.72	83	.201
II	.80	62	.430	.79	66	.709	.80	35	8.796	.81	49	.159	.81	71	.029
III	.88	39	.721	.86	24	.935	.87	47	9.052	.89	51	.405	.89	60	.310
IV	.97	39	.642	.97	30	.861	.99	39	8.775	.97	51	.408	.97	54	.269
Numero totale coppie osservate		185			759			712			644			748	

TABELLA III.

Epoca 1936	Gruppi	x			y			$\Delta\delta'$		$\Delta\delta'_s - \Delta\delta'_m$	Num. totale coppie osservate
		sera	mattino	media	sera	mattino	media	sera	mattino		
.06	IV — V	—".173	—".075	—".124	+".082	+".071	+".078	+".141	—".076		370
.14	V — VI	— .093	— .088	— .091	+ .070	+ .110	+ .090	— .079	+ .111	—".003	396
.22	VI — VII	— .090	— .140	— .115	+ .105	+ .056	+ .081	+ .069	+ .055	— .042	481
.31	VII — VIII	— .080	— .016	— .048	+ .079	+ .118	+ .099	— .003	— .050	— .058	531
.39	VIII — IX	+ .014	— .034	— .010	+ .086	+ .121	+ .104	— .107	— .199	— .057	722
.48	IX — X	+ .053	+ .067	+ .060	+ .083	+ .087	+ .085	— .220	— .104	— .021	656
.56	X — XI	+ .071	+ .052	+ .062	+ .051	+ .069	+ .060	— .141	+ .009	— .037	843
.64	XI — XII	+ .017	+ .054	+ .036	+ .007	+ .032	+ .020	+ .075	+ .075	+ .066	796
.72	XII — I	— .034	— .029	— .032	— .034	— .010	— .022	+ .074	+ .124	— .001	746
.81	I — II	— .037	— .054	— .046	— .004	— .026	— .015	+ .118	— .088	— .006	612
.89	II — III	— .082	— .081	— .082	— .070	— .023	— .047	— .072	+ .174	+ .016	482
.97	III — IV	— .085	— .167	— .126	+ .063	+ .018	+ .041	+ .163	+ .082	— 011	479
											7114

TABELLA IV.

Epoca 1936	Gruppi	x			y			$\Delta\delta$		$\Delta\delta_s - \Delta\delta_m$ (del medesimo gruppo)
		sera	mattino	media	sera	mattino	media	sera	mattino	
.06	IV — V	—″.201	—″.069	—″.135	+″.070	+″.091	+″.081	+″.103	—″.096	
.14	V — VI	— .107	— .088	— .097	+ .037	+ .101	+ .069	— .096	+ .101	″.000
.22	VI — VII	— .110	— .149	— .130	+ .060	+ .025	+ .042	+ .079	+ .052	— .022
.31	VII — VIII	— .131	— .019	— .075	+ .035	+ .072	+ .053	+ .012	— .018	— .040
.39	VIII — IX	+ .015	— .013	— .014	+ .059	+ .090	+ .074	— .083	— .170	— .065
.48	IX — X	+ .050	+ .090	+ .070	+ .067	+ .060	+ .063	— .197	— .060	— .027
.56	X — XI	+ .072	+ .065	+ .069	+ .057	+ .056	+ .056	— .127	+ .056	— .067
.61	XI — XII	+ .035	+ .071	+ .053	+ .046	+ .039	+ .042	+ .057	+ .110	+ .001
.72	XII — I	— .033	— .008	— .021	+ .009	+ .022	+ .016	+ .049	+ .141	— .061
.81	I — II	— .091	— .035	— .063	— .006	+ .018	+ .006	+ .113	— .091	— .028
.89	II — III	— .100	— .119	— .110	— .033	— .009	— .021	— .111	+ .185	— .020
.97	III — IV	— .098	— .175	— .136	+ .076	+ .061	+ .068	+ .124	+ .052	— .061

Tabella V. — $\Delta\delta$

Gruppo	Kimura	Carnera	C—K
V	—″.133	—″.096	—″.037
VI	+ .067	+ .090	+ .023
VII	— .008	+ .032	+ .040
VIII	— .077	— .051	+ .026
IX	— .173	— .183	— .010
X	— .080	— .093	— .013
XI	+ .093	+ .057	— .036
XII	+ .109	+ .079	— .030
I	+ .113	+ .127	+ .014
II	— .059	— .101	— .042
III	+ .180	+ .154	— .026
IV	+ .080	(+ .072)	(— .008)

TABELLA VI.

Longitud. / Epoca	-12^h	-10^h	-8^h	-6^h	-4^h	-2^h	0^h	$+2^h$	$+4^h$	$+6^h$	$+8^h$	$+10^h$	$+12^h$
1936													
.00	+".10	+".05	−".01	−".07	−".13	−".11	−".10	−".05	+".01	+".07	+".13	+".11	+".10
.10	+ .13	+ .07	.00	− .08	− .15	− .14	− .13	− .07	.00	+ .08	+ .15	+ .14	+ .13
.20	+ .12	+ .07	+ .02	− .05	− .13	− .10	− .12	− .07	− .02	+ .05	+ .13	+ .10	+ .12
.30	+ .08	+ .04	.00	− .05	− .10	− .08	− .08	− .04	.00	+ .05	+ .10	+ .08	+ .08
.40	+ .01	− .03	− .05	− .07	− .05	− .07	− .01	+ .03	+ .05	+ .07	+ .05	+ .07	+ .01
.50	− .07	− .09	− .09	− .06	+ .03	− .01	+ .07	+ .09	+ .09	+ .06	− .03	+ .01	− .07
.60	− .06	− .08	− .07	− .05	+ .02	− .01	+ .06	+ .08	+ .07	+ .05	− .02	+ .01	− .06
.70	.00	− .01	− .02	− .02	− .01	− .02	.00	+ .01	+ .02	+ .02	+ .01	+ .02	.00
.80	+ .06	+ .05	+ .03	.00	− .05	− .03	− .06	− .05	− .03	.00	+ .05	+ .03	+ .06
.90	+ .12	+ .09	+ .05	− .01	− .11	− .07	− .12	− .09	− .05	+ .01	+ .11	+ .07	+ .12
.00	+ .15	+ .10	+ .03	− .06	− .16	− .13	− .15	− .10	− .03	+ .06	+ .16	+ .13	+ .15

Relazione della Commissione giudicatrice del concorso per il quinquennio 1930-34 al premio Gabriele e Ruggero Torelli

(Adunanza del dì 3 aprile 1937 - XV)

Al secondo concorso per il premio Gabriele e Ruggero Torelli, tra i laureati in matematica pura nelle Università italiane dal 1. gennaio 1930 al 31 dicembre 1934, concorso bandito il 1. febbraio 1930 e prorogato il 7 novembre 1936 dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Reale di Napoli (incaricata dalla Facoltà di Scienze della R. Università di Napoli di amministrare la fondazione del detto premio), si sono presentati due concorrenti: il dott. Pietro Buzano, laureato il 13 luglio 1931 nella R. Università di Torino e ivi assistente alla cattedra di Geometria analitica, e il dott. Enzo Martinelli, laureato il 15 novembre 1933 nella R. Università di Roma e ivi assistente volontario alla cattedra di Analisi infinitesimale.

Entrambi i concorrenti hanno superato l'esame di laurea con lode, al termine di una brillante carriera scolastica.

Il Buzano presenta al concorso, oltre ad undici recensioni ed al testo di una conferenza sulle recenti geometrie riemanniane di specie superiore, nove lavori originali nel campo della geometria proiettivo-differenziale e proiettiva. Tre brevi note sono dedicate alla considerazione di particolari invarianti differenziali proiettivi; un altro lavoro contiene una semplice interpretazione geometrica dell'arco proiettivo di una curva storta. Un contributo alla geometria proiettiva iperspaziale è dato da una nota che assegna condizioni necessarie e sufficienti per l'incidenza di due iperspazi, in coordinate grassmanniane. Va ancora menzionato, come primo lavoro pubblicato dal Buzano, uno studio su alcune serie ad un parametro di affinità piane, dotate di una proprietà generalizzante quella gruppale.

Due memorie presenta altresì il Buzano: una sui sistemi di due equazioni di Laplace (lineari omogenee a derivate parziali del secondo ordine) con tre variabili indipendenti, dei quali studia certe forme canoniche e le condizioni d'integrabilità con particolare riguardo all'interpretazione geometrica fornita dalle cosiddette « varietà rappresentative »; un'altra sulle curve canoniche di genere 4 che sono contorni apparenti di superficie cubiche, e sui vari modi in cui ciò può avvenire.

L'attività scientifica del Martinelli è documentata da una ricerca, che rimonta al secondo anno dei suoi studi universitari, su alcune aree limitate da curve cicloidali; e da quattro lavori recenti, due dei quali in bozze (nel frattempo pubblicati). Una prima nota contiene una caratterizzazione delle omografie fra certi insiemi bidimensionali nello spazio, di tipo molto generale;

una nota successiva l'autore tenta di estendere ulteriormente questo sultato, rimuovendo un'ipotesi restrittiva dalla dimostrazione. Oggetto di l altro lavoro è la formola di Cauchy per le funzioni analitiche di due ariabili, nella quale si sostituisce alla superficie di integrazione abitual- ente considerata, prodotto di due curve dei piani delle due variabili, una perficie più generale.

L'ultimo lavoro del Martinelli è un'ampia memoria sulle funzioni oligene di due variabili complesse, cioè su quelle funzioni (studiate sin qui lo per una variabile indipendente) in cui con l'analiticità viene a mancare ordinaria derivabilità complessa. La ricerca, condotta prevalentemente ell'indirizzo geometrico e ricca di risultati particolari, si conclude con n'estensione alle funzioni poligene del teorema di Cauchy-Poincaré e della ormola di Cauchy.

I due concorrenti dimostrano capacità meritevoli di incoraggiamento, sono entrambi in senso assoluto degni del premio. Più numerosi sono i avori originali del Buzano, frutto di un'ininterrotta attività iniziata nel 1932. l Martinelli, laureato nel 1933, e dopo l'ordinario servizio militare chia- nato ancora sotto le armi nel 1935, ha pubblicato tutti i suoi lavori, tranne l primo, nel 1936-37. I limiti di tempo hanno dunque favorito il Buzano ispetto al Martinelli, e di ciò deve tenersi conto nel giudicare un concorso, ome il presente, fra giovani esordienti di cui sopra tutto le qualità e atti- udini vanno valutate e messe a confronto; tanto più che è escluso che un oncorrente possa presentarsi più di una volta.

La Commissione propone pertanto che il premio Gabriele e Ruggero Torelli sia diviso in parti eguali fra il dott. Pietro Buzano e il dott. Enzo Martinelli.

La Commissione
E. Pascal
A. Signorini
R. Caccioppoli *(relatore)*

ORSO MARIO CORBINO

Commemorazione letta dal socio corrispondente **A. Carrelli**

(Adunanza del dì 1 maggio 1937 - XV)

Il 26 gennaio 1937 in Roma, nella abitazione direttoriale dell'Istituto di Fisica in Via Panisperna dove si era svolta tanta parte della vita scientifica nazionale dell'ultimo cinquantennio, si spegneva dopo breve e indomabile malattia Orso Mario Corbino. Tra poco tempo Egli avrebbe lasciata quella abitazione che doveva essere adibita ad altri uffici; la Sua scomparsa, invece, segnò la fine di tutto un periodo di vita scientifica svolto fra quelle mura. Si chiudeva così bruscamente e precocemente l'attività di un uomo le cui qualità intellettuali presentavano aspetti varî ed eccezionali; si spegneva una mente lucidissima che in tutti i campi nei quali aveva svolta la Sua attività, era stata capace di dare prove, con i più brillanti risultati, della Sua potenza e originalità. Parlare della vita e delle opere del compianto nostro Socio significa trattare di una attività moltiforme di ricercatore e di tecnico, significa riferirsi ad una produzione scientifica che tocca numerosi e fondamentali campi della Fisica.

Nato ad Augusta nel 1877, gl'inizi degli studi di Orso Mario Corbino furono degni dei successi da Lui riportati nella giovinezza e nella maturità: fin dalle scuole medie ed universitarie fu notato il Suo spirito aperto ed avido di cognizioni, sempre pronto all'assimilazione di qualsiasi forma di conoscenza. Brillantissimi furono i suoi successi in tutta la Sua carriera scolastica che si svolse in un primo periodo a Catania, e che poi fu completata a Palermo nella parte universitaria. Fu nominato giovanissimo insegnante di Fisica nei Licei, e per gran fortuna della scienza italiana, dopo breve permanenza a Catanzaro, ritornò a Palermo dove potè iniziare la Sua attività di ricercatore. Il Suo nome ben presto si affermò nel mondo nazionale ed internazionale, e nel 1905, e cioè dopo pochi anni dalla laurea, lo troviamo professore di Fisica sperimentale a Messina. Nel 1908 resasi vacante la Cattedra di Fisica complementare nell'Università di Roma Blaserna lo chiama a Roma, dove continuando con notevoli successi la Sua carriera di ricercatore puro, si allarga il Suo campo di attività. Egli intensifica cioè il Suo interessamento per gli aspetti più importanti dal lato fisico della nuova scienza che sorge: l'elettrotecnica; si occupa con rara perizia sperimentale di alcune quistioni inerenti alla Fisica degli esplosivi.

S'iniziano contemporaneamente i successi nel mondo della politica e dell'industria. Dopo la guerra mondiale il Suo nome si afferma decisamente nel mondo ufficiale della politica: è nominato senatore nel 1920 ed è assunto

ORSO MARIO CORBINO

Nato in Augusta il 30 aprile 1876 - Morto in Roma il 26 gennaio 1937

la presidenza del Consiglio Superiore delle Acque, e del Consiglio Supe-
ore dei Lavori Pubblici; la Sua carriera scientifica intanto già dal 1918
ulmina con la nomina a Direttore dell'Istituto di Fisica di Roma. Entra
ine in funzione di governo con la nomina a Ministro dell'Istruzione nel
921, e come Ministro dell'Economia Nazionale nel 1923.

Nell'ultimo periodo della Sua vita si occupa principalmente di questioni
ecnico-organizzative dando la Sua opera a numerose società che lo avevano
ominato presidente o consigliere. I componenti la Camera Alta lo hanno
vuto assiduo frequentatore alle sedute, e in numerosi discorsi ha dato il
uo contributo originale alla discussione d'importanti progetti di legge.

Nominato presidente della Commissione di Controllo delle Radioaudi-
ioni, aveva iniziato con grande alacrità un nuovo tipo di ricerca speri-
entale; come fondatore e direttore di un nuovo istituto di Elettroacustica,
he ha preso posto appunto nel vecchio Istituto di Fisica in Via Panisperna,
gli si era fatto l'iniziatore geniale ed attivissimo di questi importantissimi
tudî in Italia.

Il male, che si manifestò ribelle alle più efficaci cure della medicina,
a privato la Scienza e la Nazione italiana di una forza operante, che ancora
er molti anni avrebbe data la Sua attività proficua portando in alto il
ome della nostra Patria.

Una vita così intensa e varia non mancò di dare a Lui le più alte sod-
isfazioni. Insignito di medaglia di oro dei LX, dell'Ordine civile di Savoia,
remio Reale dell'Accademia dei Lincei, premio Mussolini dell'Accademia
' Italia, Orso Mario Corbino ebbe dunque durante la Sua vita i più com-
leti riconoscimenti per la Sua opera multiforme ed efficace.

Volendo brevemente tratteggiare la figura del Corbino ricercatore, è in
rimo luogo da dire che l'attività scientifica di questo Fisico si svolge in
n'epoca critica nella storia della Scienza, sia per le complessità dello svi-
uppo che in essa si manifesta, sia per le particolari condizioni nelle quali si
rovava l'attrezzatura scientifica nel nostro paese, la quale non era pari alle
ondizioni nelle quali si trovava nelle altre nazioni. Doppiamente meritevoli
ono quindi i risultati, alcuni dei quali estremamente importanti, a cui Egli
eppe arrivare. Per produrre scientificamente in tale periodo era necessario
mpadronirsi di una tecnica sperimentale molto più evoluta della precedente
: che, d'altra parte, era in continuo processo di svolgimento. Bisognava
nche sviluppare la propria cultura in teorie sempre più originali; si era
ai tempi nei quali l'elettromagnetismo di Maxwell si evolveva nella teoria
legli elettroni, e si affacciava ai suoi primordi la teoria quantistica. Corbino,
in dai Suoi primi lavori, si manifestò dotato di una mentalità caratteristi-
amente orientata per gli studi fisici, atta cioè a comprendere nelle teorie
roposte e nell'assieme dei risultati sperimentali che si producevano, ciò
he è essenzialmente capace di servire da sintesi nel quadro dei fenomeni.
Egli conosceva con rara lucidezza la Sua scienza, sapeva fissarne gli ele-

menti fondamentali, scopriva compiutamente l'unità che in essa è contenuta. Rapidamente, nel Suo primo periodo di ricerca nell' ateneo palermitano, dominò con rara perizia una complessa tecnica sperimentale. I frutti di questa preparazione non mancarono subito di maturare: insieme col Suo Maestro Macaluso, studiando particolarità di un fenomeno che allora rappresentava una manifestazione di grande interesse, il fenomeno Zeeman, il quale dimostrava che l'emissione della luce è connessa con il movimento di cariche negative, scoprirono che il piano di polarizzazione della luce ruota in modo molto considerevole quando un fascio di raggi passa attraverso un vapore metallico posto in campo magnetico. Avuto sentore di questo nuovo effetto inaspettato, che porta ora il nome degli scopritori, il Corbino e il Macaluso riuscirono rapidamente a rendersi conto della grandissima entità del fenomeno, e dell'importanza che questo assumeva nel quadro delle manifestazioni magneto-ottiche che proprio in quel periodo erano in primo piano nella ricerca scientifica internazionale.

Il Suo nome, in virtù di questa scoperta, assunse una risuonanza internazionale e, con la produzione ulteriore, Egli riuscì sempre più ad allargare questa Sua fama. Felicissimo nella scelta degli argomenti più vitali che si agitavano nel campo della Fisica nel primo decennio di questo secolo, seppe sempre dare alla Sua produzione un tono di grande originalità. Rimanendo ancora nel campo delle ricerche magnetiche, Egli mise in evidenza particolarità notevolissime sul fenomeno di Zeeman e seppe sfruttare in varie quistioni il fenomeno della birifrangenza magnetica.

Nella Sua attività scientifica si sviluppa subito una particolare tendenza verso gli studi di problemi elettrotecnici, alla zona di confine con la Sua Scienza. Il Suo ingegno particolarmente pronto e dotato di qualità assimilative non comuni, ha portato un contributo notevolissimo in questo campo per il fatto che la Sua cultura Fisica, ben matura e profonda, ha lumeggiato in maniera geniale una serie di problemi. Sviluppò per il primo la teoria del rocchetto Rumkorf, si occupò di questioni inerenti al funzionamento dell' arco di Duddel, e trattò con grande successo il comportamento di una dinamo in serie paragonando quest' azione a quella di una resistenza negativa. Frutto di questa attività fu il conseguimento di numerosi brevetti per dispositivi che sono anche ora largamente diffusi.

La tecnica sperimentale in quel periodo si era arricchita di un mezzo potentissimo: il tubo di Braun. Corbino ha saputo trarre da questo dispositivo un numero notevolissimo di risultati applicando questo sistema con una grande abilità alle questioni più disparate. Ricordiamo qui i Suoi risultati sui fenomeni fotoelettrici ed il grande interesse che suscitò in Lui la comparsa delle lampade termojoniche delle quali Egli capì subito l'enorme importanza.

Ricerche di carattere eminentemente fisico e che hanno legato il Suo nome ad uno dei più interessanti complessi di fenomeni, furono da Lui com-

piute nel campo degli effetti galvanomagnetici. In quel periodo una delle questioni che maggiormente dominava la ricerca fisica, era quella di stabilire elementi che dessero indicazioni sul movimento degli elettroni liberi nei metalli; HALL aveva mostrato che si poteva modificare tale moto per opera di un campo magnetico agente su di una lamina percorsa da corrente; dallo schema di HALL erano poi stati tratti una serie di manifestazioni termiche ed elettriche in cui si modifica l'andamento delle linee di corrente sia elettrica che termica. Ora il CORBINO pensò di modificare profondamente lo schema di HALL passando dalle correnti assiali a correnti radiali in un disco: venne messo così in evidenza un nuovo effetto, l'effetto CORBINO, che portò un notevolissimo contributo di altri dati sperimentali alla complessa quistione. Ma, come già si è accennato, l'effetto HALL è accompagnato da una serie di manifestazioni; fatti analoghi è presumibile che si riscontrino nel caso dell'effetto CORBINO, ed il nostro Socio appunto non si lasciò sfuggire nessuna di queste particolarità, ma in una serie di Note seppe mettere compiutamente in evidenza tutto quello che era contenuto nel Suo nuovo dispositivo, ed in alcuni casi seppe dare una forma quasi paradossale ai risultati raggiunti che si presentavano come molto originali. Ricordo a questo proposito un dispositivo atto a creare il movimento in campo magnetico di un rotore privo di contatti striscianti.

Un gruppo di ricerche che forse meglio di qualunque altro è capace di dare un'idea delle Sue possibilità sperimentali, è rappresentato da quei lavori nei quali Egli determina il calore specifico dei metalli ad altissima temperatura. L'idea centrale di questa ricerca è basata sullo studio del funzionomento delle lampade metalliche ad incandescenza; muovendo da questo problema Egli riuscì a compiere con metodi indiretti, misure di calori specifici a temperatura elevatissima; in questa ricerca raggiunse un risultato imprevisto: il calore atomico dei metalli da lui studiati (platino e tungsteno) supera, ed in modo notevole, il valore teorico che è fissato dalla legge di DULONG e PETIT. Questo risultato che fu considerato un pò dubbio all'inizio, ha avuto poi la conferma da ricerche ulteriori fatte in Istituti esteri, e l'evoluzione successiva della teoria ha permesso di interpretare questo importante risultato sperimentale.

Così noi non abbiamo che rapidamente accennato alle quistioni più importanti da Lui trattate; la Sua attività scientifica viene raccolta in circa centosettanta lavori che trattano argomenti sempre vitali della Scienza da Lui coltivata.

Se queste parole servono a ricordare sinteticamente i contributi più originali che Egli ha dato alla scienza, non si può tralasciare di dire che la Sua attività si esplicava ancora nello studio di tutta la vasta produzione scientifica mondiale e in una vigile opera critica di vaglio e di chiarificazione È notevole per esempio in questo vasto campo di memorie, conferenze, etc. la Sua lucida esposizione sulla teoria della pila ed i Suoi brillanti discorsi

ed articoli su quistioni generali di Fisica nucleare e sulle trasformazioni artificiali degli elementi che possono servire a mostrare quale comprensione Egli avesse di concetti fisici fondamentali.

Negli ultimi anni Egli si era dedicato a studi di acustica. Frutto di questa Sua attività, e frutto non indifferente, è stata la creazione di un Istituto di Elettroacustica dove Egli rapidamente riuscì a riunire un magnifico materiale sperimentale, ed a dare un potente slancio propulsore. Già l'attività del nuovo Istituto sotto la Sua guida era in pieno sviluppo e la Sua ultima comunicazione ai Lincei, pochi giorni prima che si manifestasse il male che doveva spegnerlo, riguardante la taratura elettrica dei microfoni, dimostra come Egli, in questi nuovi problemi, affrontasse le quistioni fondamentali e più discusse portandovi un contributo personale originalissimo.

Ma una disamina dall'opera scientifica di Orso Mario Corbino non è completa se non viene ricordata l'azione che Egli ha svolto in profitto della Fisica italiana. Egli era un uomo che amava profondamente i giovani ed era veramente lieto quando vedeva che questi man mano si maturavano alla Scienza. Dotato di uno spirito acuto sia nel giudicare i fatti della Natura sia gli uomini che dovevano indagarli, sapeva esercitare in base al Suo fascino personale una attrazione potente su tutti quelli che considerava capaci di dedicarsi alla ricerca scientifica. Appena dopo la guerra, quando la Nazione iniziava il suo sforzo costruttivo, amò circondarsi di una schiera di ricercatori che da Lui quotidianamente, molte volte tra le cure di governo, ricevevano la Sua parola animatrice. Egli amava stare tra di essi, era estremamente interessato a seguire la formazione della loro cultura, capacissimo nella Sua grandissima modestia, di preferire l'espressione più sintetica, un dispositivo più felice di un giovane a quello da Lui presentato. In questo Suo atteggiamento semplice, privo di qualsiasi superiorità, e che pur destava in tutti una ammirazione profonda, Corbino si guadagnò la devozione di tutti i giovani fisici italiani che ebbero la fortuna di avvicinarlo. Presentare a Lui una difficoltà sperimentale o concettuale, e sentire la rapidità con la quale questa difficoltà era da Lui assimilata, seguire la discussione che nasceva in seguito a questo processo d'assimilazione, rappresentava uno dei più utili insegnamenti che si potessero avere. A moltissimi giovani professori Corbino ha dato il Suo aiuto, il Suo incoraggiamento; in tutti quelli che Egli ha avvicinato ha lasciato l'impressione che Egli fosse veramente uno degl'ingegni più originali e più lucidi nel mondo della Scienza italiana.

La Sua bontà sarà ricordata da tutti i Suoi discepoli; le Sue opere gli assicurano, nel presente e nel futuro, la fama tra di noi e fuori i confini della Patria.

Il movimento del polo di rotazione della Terra dedotto dalle osservazioni delle stazioni internazionali

Nota del socio corrispondente **L. Carnera**

(Adunanza del dì 1. maggio 1937 - XV)

Sunto. — Dopo aver esposto i risultati delle osservazioni di latitudine eseguite nel 1936, agli Osservatori di Nuova Adelaide e di La Plata, si determina la Polodia dello scorso anno servendosi simultaneamente dei risultati ottenuti nelle Stazioni sia boreali che australi, mettendo in evidenza il vantaggio sensibile, che così si ottiene di fronte al metodo tenuto fino ad ora.

Nella mia prima comunicazione ho dedotto in forma provvisoria la traiettoria descritta dal Polo di rotazione della Terra durante il decorso anno 1936, dalle osservazioni delle cinque stazioni dell'emisfero boreale, seguendo lo stesso sistema usato dal Prof. Kimura; sarebbe stato possibile seguitare ulteriormente ed utilizzare le osservazioni delle stazioni australi per ricavare i termini periodici locali, e le correzioni delle declinazioni, partendo dai risultati ottenuti nelle stazioni boreali. Ma due ragioni mi hanno distolto dal farlo. Anzitutto mi è sembrato, che in tal guisa il materiale di osservazioni, ricco e diligentemente raccolto a La Plata ed a Nuova Adelaide, non fosse adeguatamente utilizzato, e di più, avevo dovuto rilevare, che per ovvie ragioni climatiche risultava sminuito in certe stagioni il regolare ritmo delle osservazioni, da cui veniva nelle diverse epoche dell'anno una notevole diversità di sicurezza nelle coordinate del Polo dedotte dalle sole osservazioni dell'emisfero boreale. Mentre infatti nei mesi estivi si osservano complessivamente circa 800 coppie in ogni mese, si scende al disotto della metà in quelli invernali, e mentre per la deduzione della coordinata x, ha il massimo peso la stazione di Carloforte, questa coordinata, che già per sè stessa risulta determinata con peso minore, si trova ad esser ricavata da un numero di osservazioni troppo esiguo nei mesi invernali in confronto di quanto avviene negli estivi. Tenendo pertanto conto che proprio i mesi peggiori dell'emisfero australe coincidono con i migliori del boreale, e viceversa mi parve utile sottoporre ad una unica trattazione tutte le osservazioni dedotte dalle stazioni boreali e da quelle di La Plata e Nuova Adelaide. Non ritenni opportuna l'aggiunta di Batavia in quanto la longitudine sua non differendo molto da quelle di Mizusawa e di Nuova Adelaide, non avrebbe potuto portare un sensibile ulteriore contributo ad aumentare il peso delle coordinate, e particolarmente delle x, mentre invece sarebbe stato necessario

introdurre una ulteriore incognita principale per tener conto delle correzioni delle declinazioni tutte proprie di quella stazione.

Rimettendomi alla mia prima nota per ciò che si riferisce alle stazioni boreali, dirò che gli osservatori delle due Stazioni australi sono stati rispettivamente i Signori: A. L Dawson ed A. E. Morkey a N. Adelaide, e V. Manganiello a La Plata. Per la riduzione delle osservazioni si sono usate le posizioni apparenti calcolate in precedenza dal prof. Kimura, che gentilmente ebbe a comunicarcele. Analogamente per le costanti strumentali si si è fatto uso dei dati da Esso comunicatici, oltre che di quelli avuti direttamente dalle Stazioni. Il valore angolare di una rivoluzione del micrometro è stato assunto eguale a 39″.9401 per N. Adelaide, e 39″.7601 per La Plata, e quelli delle livelle rispettivamente:

Liv. I. $= 0^R.024541$ e Liv. II. $= 0^R.023341$ per la prima stazione, e
Liv. I. $= 0^R.024421$ e Liv. II. $= 0^R.028647$ per la seconda.

Si adottò infine quali valori della latitudine media e longitudine delle due stazioni i valori:

$\varphi_0 = -34^\circ 55' 36''.78$ $\lambda = -138^\circ 35'$ per Nuova Adelaide, e
$\varphi_0 = -34\ 54\ 31\ .82$ $\lambda = +\ 37\ 56'$ per La Plata.

I risultati delle osservazioni delle due stazioni, risultano evidenti unitamente all'epoca, numero delle osservazioni, e deviazioni dalla latitudine media dalle tabelle seguenti. Nella tabella II, accanto ai $\Delta\varphi$ $\varphi - \varphi_0$ dedotti dalle osservazioni serali e del mattino, sono pur dati i residui corrispondenti $\Delta\delta'$, che si ottengono quando si tenga conto delle variazioni delle latitudini ricavate dalle stazioni boreali, e che evidentemente contengono il termine dovuto alla correzione delle declinazioni, i termini periodici locali, e le correzioni alla latitudine media assunta, oltre ben inteso agli errori di osservazione, includendo in questi anche gli errori dipendenti dalla non esatta conoscenza od uso delle costanti strumentali. Le ultime colonne danno le differenze di questi residui derivanti da osservazioni dell'identico gruppo di stelle ma eseguite una volta nelle ore serali, ed una in quelle del mattino: queste differenze dovrebbero essere essenzialmente indipendenti dagli errori di declinazione, e da quello della latitudine media e rappresentare oltre agli errori accidentali, quelli sistematici e gli effetti locali.

TABELLA I.

N. ADELAIDE					LA PLATA			
	Gr. serale		Gr. matt.		Gr. serale		Gr. matt.	
1936	Copp. oss.	φ_s	Copp. oss.	φ_m	Copp. oss.	φ_s	Copp. oss.	φ_m
.06	69	36″.586	64	36″.653	84	31″.675	76	31″.855
.14	98	.818	93	.807	118	.800	88	.754
.22	32	.815	36	7 .187	81	.719	68	2 .081
.31	64	7 .218	59	6 .971	59	2 .152	49	1 .903
.39	70	.065	60	.926	57	1 .879	51	.847
.47	41	.029	22	.872	41	.868	40	.732
.55	38	6 .816	34	.757	76	.741	69	.672
.64	50	.683	40	.912	50	.654	51	.817
.73	39	.877	36	.625	90	.925	72	.790
.81	48	.702	52	.460	85	.800	66	.623
.89	43	.355	44	.724	81	.610	53	.944
.98	55	.694	48	.636	88	.929	69	.807
Σ	647		588		910		752	
	1235				1662			

Tabella II.

	N. ADELAIDE					LA PLATA				
1936	$\Delta\varphi_s$	$\Delta\varphi_m$	$\Delta'\delta_s$	$\Delta\delta'_m$	$\Delta'_s-\Delta'_n$	$\Delta\varphi_s$	$\Delta\varphi_m$	$\Delta\delta'_s$	$\Delta\delta'_m$	$\Delta'_s-\Delta'_m$
.06	+ .194	+ .127	+ .147	+ .080		+ .145	− .035	+ .148	− .032	
.14	− .038	− .027	− .065	− .054	− .145	+ .020	+ .066	+ .013	+ .059	+ .055
.22	− .035	− .407	− .104	− .476	− .050	+ .101	− .261	+ .134	− .229	+ .073
.31	− .438	− .191	− .459	− .212	+ .017	− .332	− .083	− .337	− .088	− .108
.39	− .285	− .146	− .246	− .107	− .034	− .059	− .027	− .115	− .083	− .027
.47	− .249	− .092	− .155	+ .002	− .048	− .048	+ .088	− .138	− .002	− .055
.55	− .036	+ .023	+ .053	+ .112	+ .051	+ .079	+ .148	− .005	+ .064	− .003
.64	+ .097	− .132	+ .165	− .064	+ .053	+ .166	+ .003	+ .102	− .061	+ .038
.72	− .097	+ .155	− .102	+ .150	− .038	− .105	+ .030	− .108	+ .027	− .047
.81	+ .078	+ .320	+ .035	+ .277	− .115	+ .020	+ .197	+ .048	+ .225	+ .021
.89	+ .425	+ .056	+ .329	− .040	+ .052	+ .210	− .124	+ .286	− .048	+ .061
.97	+ .086	+ .144	+ .029	+ .087	+ .069	− .109	+ .013	− .095	+ .027	− .047

Senza insistere su questo punto, che sembra prematuro allo stato attuale lla discussione delle osservazioni, si è passati invece alla deduzione delle ordinate istantanee del polo per le epoche medie di ciascuna combinazione ei gruppi stellari, considerando contemporaneamente le differenze osservate elle latitudini istantanee in confronto alle medie, tanto delle stazioni bo- ali, che delle australi. Si è dovuto naturalmente aggiungere una nuova ncognita per la correzione delle declinazioni stellari adottate per le stazioni ell'emisfero australe: si ebbero pertanto per ciascun epoca 7 equazioni di ondizioni con 4 incognite.

Se distinguiamo con gli indici $1, 2, \ldots, 6, 7$ le differenze di latitudine sservate rispettivamente nelle stazioni di Mizusawa, Kitab, Carloforte, Gai- hersburg, Ukiah, N. Adelaide e La Plata, e per semplicità attribuiamo gual peso ai risultati di tutte le stazioni, indipendentemente dal numero elle osservazioni, ciò che forse è da ritenere un poco arbitrario, si trova he le coordinate istantanee del polo sono date da:

$$\begin{aligned} x = &- 0.2601\,\Delta\varphi_1 + 0.1810\,\Delta\varphi_2 + 0.3475\,\Delta\varphi_3 + 0.0008\,\Delta\varphi_4 + \\ &- 0.2683\,\Delta\varphi_5 - 0.1837\,\Delta\varphi_6 + 0.1840\,\Delta\varphi_7 \\ y = &- 0.1159\,\Delta\varphi_1 - 0.2645\,\Delta\varphi_2 - 0.1020\,\Delta\varphi_3 + 0.2347\,\Delta\varphi_4 \\ &+ 0.2473\,\Delta\varphi_5 - 0.1544\,\Delta\varphi_6 + 0.1546\,\Delta\varphi_7 . \end{aligned}$$

Servendosi di queste espressioni, si ottennero i valori in prima approssimazione delle coordinate del Polo, ed i residui per le stazioni dei due emisferi contenuti nella tabella III, ove tutti i valori sono espressi senz'altro in 0″.001, e sono dati in modo distinto i valori risultanti dalle osservazioni dei gruppi serali, e quelli derivati dai gruppi osservati nelle ore del mattino. Il mutuo accordo fra i valori delle coordinate del Polo ottenuto dalle osservazioni serali e da quelle del mattino risulta ora sensibilmente aumentato in confronto ai risultati ottenuti nella deduzione fatta utilizzando solo le stazioni boreali: se alle differenze si attribuiscono le caratteristiche di errori accidentali, troviamo, che mentre dianzi l'error medio rispettivamente per una x ed y era $\pm 0''.051$ ed $\pm 0''.033$, ora risulta ridotto a soli $\pm 0''.034$ e $\pm 0''.026$. La tabella III^{bis} contiene i valori dei termini residui per i due gruppi di stazioni, in cui entrano essenzialmente gli errori delle declinazioni, e quelli dei termini periodici locali.

Tabella III e III^{bis}

Si è proceduto poscia analogamente a quanto fatto nella prima riduzione: si sono calcolati cioè con queste coordinate di prima approssimazione, le variazioni della latitudine di ciascuna stazione, e servendosi di questi valori si sono dedotti i residui, che dovrebbero risultare costituiti essenzialmente dalle correzioni delle declinazioni e dai termini locali periodici

TABELLA III.

1936	x_s	x_m	$x_s - x_m$	X	y_s	y_m	$y_s - y_m$	Y
.06	— 166	— 108	— 58	— 137	+ 89	+ 48	+ 41	+ 68
.14	— 81	— 80	— 1	— 80	+ 81	+ 117	— 36	+ 99
.22	— 74	— 97	+ 23	— 85	+ 118	+ 94	+ 24	+ 106
.31	— 64	— 26	— 38	— 45	+ 93	+ 110	— 17	+ 102
.39	+ 26	— 39	+ 65	— 6	+ 97	+ 118	— 21	+ 107
.47	+ 50	+ 59	— 9	+ 54	+ 84	+ 82	+ 2	+ 83
.56	+ 61	+ 44	+ 17	+ 52	+ 42	+ 62	— 20	+ 52
.64	+ 24	+ 57	— 33	+ 40	+ 13	+ 33	— 20	+ 23
.72	— 16	— 41	+ 25	— 28	— 19	— 21	+ 2	— 20
.81	— 55	— 55	0	— 55	— 6	— 28	+ 22	— 17
.88	— 82	— 88	+ 6	— 86	— 69	— 29	— 40	— 49
.97	— 119	— 157	+ 38	— 138	+ 34	+ 27	+ 7	+ 30

TABELLA III (bis)

1936	$\Delta'\delta_s^n$	$\Delta'\delta_m^n$	$(s-m)$	$\Delta'\delta_s^s$	$\Delta'\delta_m^s$	$(s-m)$	Gruppi
.06	+ .143	— .071		+ .139	+ .034		IV - V
.14	— .077	+ .114	— .006	— .026	.000	— .060	V - VI
.22	+ .071	+ .053	— .043	+ .016	— .344	+ .016	VI - VII
.31	— .003	— .045	— .056	— .401	— .148	— .057	VII - VIII
.39	— .106	— .195	— .061	— .176	— .105	— .028	VIII - IX
.46	— .217	— .101	— .022	— .152	— .001	— .047	IX - X
.56	— .138	+ .012	— .037	+ .023	+ .084	+ .022	X - XI
.64	+ .074	+ .076	+ .062	+ .136	— .062	+ .052	XI - XII
.72	+ .071	+ .125	— .005	— .100	+ .088	— .038	XII - I
.81	+ .119	— .086	— .006	+ .045	+ .257	+ .043	I - II
.88	— .074	+ .174	+ .012	+ .312	— .037	+ .055	II - III
.97	+ .167	+ .082	+ .097	— .026	+ .055	+ .011	III - IV

delle variazioni. Procedendo al solito modo si ricavarono allora le seguenti costanti locali:

	Differenza cost. fra osserv. ser. e mattutine.	Termini periodici r_2	A_2
Mizusawa . . .	— 0″.014	+ 0″.021	— 116°
Kitab	+ .003	+ .024	+ 10
Carloforte	+ .004	+ .034	— 38
Gaithersburg . . .	— .021	+ .012	— 80
Ukiah	— .016	+ .015	— 44
Nuova Adelaide . .	+ .001	+ .037	+ 12
La Plata	.000	+ .026	— 81

Riteniamo però a questo punto non privo di interesse far notare come realmente appaia un fenomeno caratteristico locale: se paragoniamo infatti, la media dei due residui ricavati dalle osservazioni serali e mattutine per ciascuna stazione al valore medio risultante da tutte le cinque dello stesso emisfero, si trovano i valori della tabella seguente, in cui evidente appare il carattere sistematico in tutte le stazioni.

Tabella IV

Servendosi dei valori trovati pei termini locali si corressero allora le latitudini istantanee osservate in ciascuna stazione, ottenendo dopo di ciò i nuovi scostamenti dalle latitudini medie, riportati nella tabella numerica seguente (V), che permise il calcolo delle nuove coordinate del Polo (VI), nonchè quello delle correzioni delle declinazioni dei gruppi di stelle osservati nei due emisferi (VII). Il significato delle diverse tabelle numeriche è ovvio e chiaro da non richiedere ulteriori schiarimenti.

Tabella V, VI e VII

Se dal confronto dei valori delle coordinate x ed y del Polo risultanti da questo calcolo di seconda approssimazione, con quelli analoghi ottenuti dalla prima si scorge che nell'accordo fra i valori trovati con le osservazioni serali e mattutine non è venuto un miglioramento sensibile, evidente però è il miglior accordo nell'andamento dei valori, che acconsente un tracciamento molto più sicuro delle curve, lasciando scarti molto minori. Una analoga considerazione si può fare per le correzioni delle declinazioni. È sembrato a questo punto interessante vedere, come risultassero le correzioni delle declinazioni derivanti dalle singole stazioni, onde accertare la scomparsa o permanenza del carattere sistematico dianzi constatato. Calcolate

Tabella IV.

Gruppo	Miz.	Kit.	Car.	Gait.	Uki.
V	+ .025	— .035	— .020	— .009	+ .038
VI	+ .023	— .013	+ .005	+ .020	— .033
VII	— .043	— .047	+ .060	+ .014	— .015
VIII	+ .048	— .054	+ .009	— .023	+ .022
IX	— .001	— .010	+ .042	— .022	— .011
X	+ .042	— .034	+ .002	+ .010	— .011
XI	+ .042	— .057	+ .056	— .051	+ .010
XII	+ .012	— .061	+ .059	— .033	+ .025
I	+ .011	— .010	+ .042	— .041	+ .007
II	+ .040	— .049	+ .049	+ .003	+ .041
III	+ .061	— .003	— .014	— .036	— .009
IV	— .018	— .057	+ .111	— .081	+ .042
Media	+ .012	— .036	+ .033	— .018	+ .009

TABELLA V — *Osservazioni serali.*

1936	MI	KI.	CF.	GA.	UK.	NA.	LP.
.06	+ .226	+ .014	— .133	+ .251	+ .220	+ .175	+ .124
.14	— .094	— .140	— .231	— .043	+ .016	— .039	— .006
.22	+ .033	— .045	— .026	+ .093	+ .233	— .017	+ .077
.31	— .052	— .049	— .109	+ .027	+ .129	— .406	— .347
.39	— .197	— .138	— .097	— .024	— .032	— .247	— .062
.47	— .326	— .247	— .152	— .130	— .178	— .215	— .037
.56	— .268	— .097	— .061	— .105	— .087	— .015	+ .100
.61	+ .057	+ .120	+ .054	+ .147	+ .033	+ .100	+ .192
.72	+ .124	+ .115	+ .025	+ .059	+ .053	— .113	— .081
.81	+ .154	+ .107	+ .058	+ .118	+ .125	+ .048	+ .035
.88	— .008	— .004	— .213	— .167	— .076	+ .389	+ .213
.97	+ .173	+ .069	+ .034	+ .197	+ .247	+ .054	— .120
			Osservazioni mattutine.				
.06	— .039	— .209	— .190	+ .007	+ .002	+ .091	— .046
.14	+ .087	— .003	— .043	+ .197	+ .267	— .047	+ .015
.22	+ .111	— .035	— .140	+ .085	+ .173	— .409	— .287
.31	— .133	— .145	— .094	+ .046	+ .079	— .174	— .107
.39	— .272	— .265	— .293	— .051	— .080	— .115	— .042
.47	— .225	— .117	— .041	+ .013	— .049	— .055	+ .085
.56	— .086	— .018	+ .040	+ .134	+ .054	+ .054	+ .159
.61	— .003	+ .159	+ .072	+ .202	+ .069	— .112	+ .024
.72	+ .186	+ .135	+ .089	+ .185	+ .112	+ .157	+ .056
.81	— .022	— .063	— .159	— .089	— .065	+ .303	+ .221
.88	+ .268	+ .153	+ .080	+ .153	+ .208	+ .025	— .109
.97	+ .183	+ .075	— .213	+ .150	+ .159	+ .107	+ .016

TABELLA VI.

1936	x_s	x_m	$x_s - x_m$	X	y_s	y_m	$y_s - y_m$	Y
.06	− .171	− .119	− .052	− .145	+ .089	+ .060	+ .029	+ .074
.14	− .079	− .092	+ .013	− .086	+ .070	+ .122	− .052	+ .096
.22	− .071	− .108	+ .037	− .089	+ .105	+ .092	+ .013	+ .098
.31	− .057	− .033	− .024	− .040	+ .077	+ .104	− .027	+ .090
.39	+ .035	− .044	+ .079	− .004	+ .084	+ .111	− .027	+ .097
.47	+ .068	+ .062	+ .006	+ .065	+ .072	+ .074	− .002	+ .073
.56	+ .075	+ .034	+ 041	+ .054	+ .035	+ .072	− .037	+ .053
.64	+ .034	+ 0.61	− .027	+ .047	+ .013	+ .036	− .023	+ .024
.72	− .011	− .041	+ .030	− .026	− .016	− .011	− .005	− .013
.81	− .036	− .059	+ .023	− .047	+ .005	− .014	+ .019	− .004
.88	− .085	− .095	+ .010	− .090	− .061	− .013	− .048	− .037
.97	− .119	− .167	+ .048	− .143	+ .038	+ .041	− .003	+ .040

TABELLA VII.

1936	Gruppi	$\Delta\delta_s^n$	$\Delta\delta^n{}_m$	$(s-m)$	$\Delta\delta^n$	$\Delta\delta_s^s$	$\Delta\delta^s{}_m$	$(s-m)$	$\Delta\delta^s$
.06	IV - V	+ .123	— .081	(+ .044)	(+ .101)	+ .122	+ .005	(+ .083)	(+ .081)
.14	V - VI	— .096	+ .103	— .015	— .088	— .037	— .022	— .042	— .016
.22	VI - VII	+ .059	+ .042	— .044	+ .081	+ .012	— .368	+ .034	— .005
.31	VII - VIII	— .012	— .050	— .054	+ .015	— .389	— .153	— .021	— .378
.39	VIII - IX	— .102	— .192	— .052	— .076	— .158	— .093	— .005	— .155
.47	IX - X	— .212	— .089	— .020	— .202	— .125	+ .015	— .032	— .109
.56	X - XI	— .129	+ .021	— .040	— .109	+ .047	+ .103	+ .032	+ .031
.64	XI - XII	+ .080	+ .096	+ .059	+ .050	+ .149	— .041	+ .046	+ .126
.72	XII - I	+ .076	+ .144	— .020	+ .086	— .097	+ .103	— .056	— .069
.81	I - II	+ .115	— .077	— .029	+ .129	+ .038	+ .257	— .065	+ .070
.88	II - III	— .082	+ .176	— .005	— .079	+ .297	— .051	+ .040	+ .277
.97	III - IV	+ .150	+ .079	— .026	+ .163	— .050	+ .039	+ .001	— .050

e variazioni di latitudine per ciascuna stazione, tenendo conto pure delle costanti locali, si sono trovati i valori della seguente tabella VIII. In essa vediamo le correzioni, per le declinazioni che risultano pei diversi gruppi, distinte a seconda che dedotte da osservazioni serali o mattutine; e le loro medie generali ci ridanno, a controllo dei risultati, gli stessi valori trovati direttamente dalla risoluzione delle equazioni generali. Ma gli scostamenti, che presentano i valori delle singole stazioni, raccolti nella tabella IX, mostrano che il fenomeno sistematico continua a persistere, pur essendosi attenuata la sua entità. Sarebbe forse prematuro allo stato attuale delle riduzioni, con valori cioè del tutto provvisorii delle costanti, voler spingere più oltre l'indagine per individuare l'origine di questo fenomeno sistematico, e ben può darsi che una rettifica del valore angolare del micrometro basti a farlo scomparire; ma non bisogna a questo punto neppur perdere di vista l'ordine di precisione che hanno e possono avere i risultati. I telescopi zenitali oggi in uso con la modesta loro forza ottica, e con la piccola distanza focale, anche usati con l'abilità e le cure degli osservatori delle stazioni internazionali, non possono dare risultati, che sorpassino il limite delle quantità realmente visibili. Basta allora ricordare come possa avvenire che una stazione per effetto stagionale non riesca osservare durante tutto il corso di un mese più di una ventina di coppie, per intuire che il grado di sicurezza col quale risulta determinata la latitudine debba risultare dell'ordine del decimo di secondo, e se ciò avviene ad esempio per la stazione di Carloforte, che esercita un peso molto maggiore di tutte le altre sulla coordinata x del Polo, non devono far meraviglia scarti eventuali di decine di millesimi di secondo.

Tabella VIII e IX

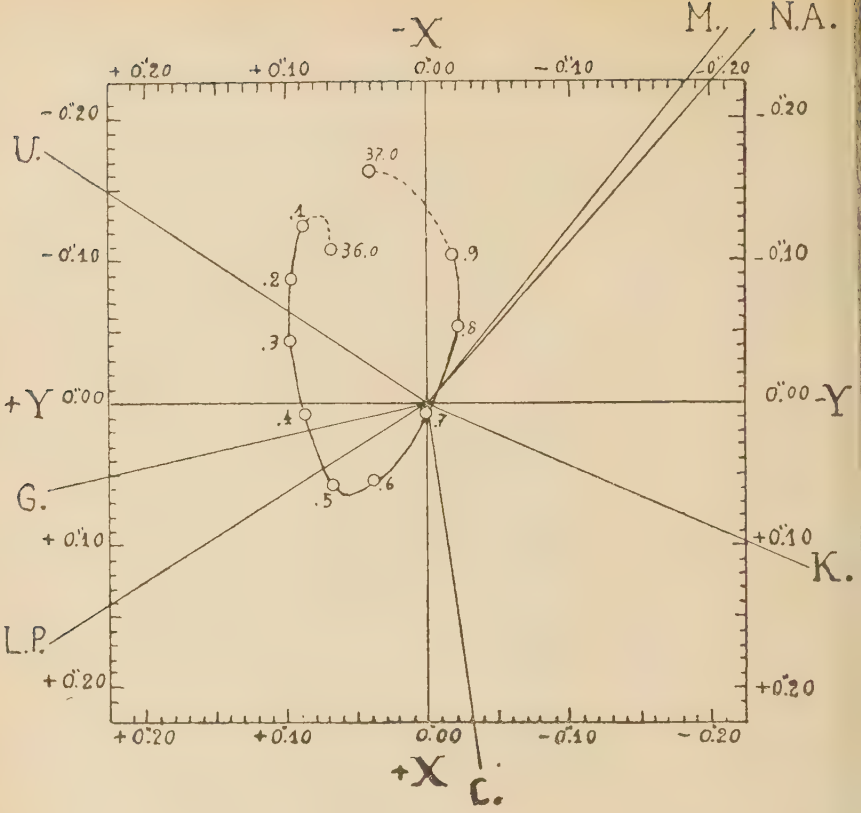
Dai valori delle coordinate istantanee del Polo, conclusi nella tabella VI, con rappresentazione grafica si sono tolte le lievissime discontinuità di andamento, e tratti i valori seguenti delle x ed y per gli istanti progressivi di ventesimo in ventesimo di anno, venne disegnata la Polodia, che pur mostrando le caratteristiche essenziali trovate nella prima discussione, si presenta in una forma più regolare (fig. seguente). Gli ultimi tratti derivando da estrapolazione presentano naturalmente una incertezza maggiore, e per questo appunto si sono tratteggiati semplicemente.

TABELLA VIII.

1936	Gruppo	Mi.		Ki.		Cf.		Ga.		Uk.		Media generale
.06	IV	+.150		+.139		+.021		+.211		+.079		
	V	−.115		−.084		−.036		−.033		−.139		
			−.108		−.051		−.084		−.074		−.125	−.089
.14	V	−.101		−.018		−.132		−.116		−.111		
	VI	+.080		+.119		+.056		+.124		+.140		
			+.052		+.099		+.066		+.070		+.121	+.082
.22	VI	+.025		+.080		+.076		+.017		+.102		
	VII	+.103		+.090		−.038		+.009		+.042		
			+.038		+.069		−.047		−.021		+.037	+.015
.31	VII	−.027		+.049		−.056		−.051		+.032		
	VIII	−.108		−.047		−.041		−.032		−.018		
			−.123		−.047		−.060		−.075		−.066	−.074
.39	VIII	−.139		−.047		−.079		−.118		−.115		
	IX	−.214		−.174		−.275		−.145		−.163		
			−.227		−.189		−.240		−.180		−.183	−.203
.47	IX	−.240		−.205		−.206		−.215		−.204		
	X	−.129		−.075		−.095		−.072		−.075		
			−.161		−.072		−.101		−.120		−.088	−.108
.56	X	−.193		−.069		−.107		−.169		−.102		
	XI	−.011		+.010		−.006		+.070		+.039		
			+.048		+.067		+.002		+.091		+.039	+.049
.64	XI	+.108		+.124		+.011		+.113		+.039		
	XII	+.048		+.163		+.029		+.168		+.075		
			+.072		+.138		+.038		+.122		+.062	+.087
.72	XII	+.096		+.113		+.048		+.077		+.050		
	I	+.158		+.133		+.112		+.203		+.109		
			+.137		+.127		+.108		+.167		+.106	+.129
.81	I	+.116		+.122		+.104		+.132		+.103		
	II	−.060		−.048		−.113		−.075		−.087		
			−.085		−.025		−.119		−.093		−.090	−.083
.88	II	−.111		−.003		−.126		−.111		−.093		
	III	+.175		+.154		+.164		+.209		+.190		
			+.131		+.158		+.173		+.199		+.162	+.164
.97	III	+.087		+.162		+.182		+.190		+.135		

Tabella IX.

Gruppo	Mi.	Ki	Cf.	Ga	Uk.
V	+ .019	— .037	— .005	— .015	+ .036
VI	+ .030	— .017	+ .016	+ .012	— 039
VII	— .023	— .054	+ .062	+ .036	— .022
VIII	+ .049	— .027	— .014	+ .001	— .008
IX	+ .024	— .014	+ .037	— .023	— .020
X	+ .053	— .036	— .007	+ .012	— .020
XI	+ .001	— .018	+ .047	— .042	+ .010
XII	+ .014	— .051	+ .049	— .035	+ .025
I	— .008	+ .002	+ .021	— .038	+ .023
II	+ .002	— .058	+ .036	+ .010	+ .007
III	+ .033	+ .006	— .009	— .035	+ .002
IV	— .024	— .054	+ .121	— ,078	+ .036
Media	+ .014	— .030	+ .030	— .016	+ .002


-X
M.
N.A.
+ 0".20
+ 0".10
0".00
- 0".10
- 0".20
U.
- 0".20
- 0".10
37.0
1
36.0
.9
.2
.8
.3
+Y
0".00
.4
.7
0".00
-Y
G.
.5
.6
+ 0".10
+0".10
K.
L.P.
+ 0".20
+0".20
+ 0".20
+ 0".10
0".00
- 0".10
- 0".20
+X
C.

Coordinate istantanee del polo boreale.

1936	X	Y
.00	−″.108	+″.066
.05	− .124	+ .067
.10	− .124	+ .086
.15	− .108	+ .092
.20	− .088	+ .096
.25	− .066	+ .099
.30	− .044	+ .097
.35	− .022	+ .093
.40	+ .007	+ .087
.45	+ .038	+ 0.79
.50	+ .056	+ .066
.55	+ .064	+ .056
.60	+ .054	+ .037
.65	+ .034	+ .019
.70	+ .002	+ .004
.75	− .025	− .009
.80	− .053	− .021
.85	− .077	− .024
.90	− .103	− .018
.95	− .130	+ .005
1937.00	− .162	+ .040

Napoli, R. Osservatorio di Capodimonte, 30 aprile 1937 - XV.

Per la storia della prospettiva. — Il *De artificiali perspectiva* e Jean Pèlerin (viator)

Nota II della prof. **Maria Da Villa**, *presentata dal socio* **R. Marcolongo**

(Adunanza del dì 12 giugno 1937 - XV)

Sunto. — Si prende in esame il *De Artificiali Perspectiva* e si fa notare in quale considerazione questo libro è stato tenuto da artisti e bibliografi.

Esaminiamo ora il *De Artificiali Perspectiva*. L'Autore, dopo esposti i principî della prospettiva [1]), fa conoscere, con indirizzo del tutto pratico, quali sono i punti e le linee fondamentali [2]), e mentre dice che *l'orizzontale* su cui stanno il *punto principale* e i *terzi punti*, si trova sempre alla stessa altezza dell'occhio di chi disegna [3]), e quindi si disloca a seconda che il disegnatore sale o scende, non dice con precisione nè che cos'è la *linea di terra*, nè a quale distanza debbono essere fissati i *terzi punti* rispetto al *punto principale*. Per la *linea di terra* si può pensare che il suo stesso nome e l'uso ormai comune di essa abbia esonerato l'Autore dal farne una

---

[1]) I principî si riducono ai seguenti:

— la luce proviene dalle cose esteriori;

— ogni cosa è vista come per mezzo di linee procedenti dall' occhio, cioè per mezzo del triangolo, di cui la base è la cosa vista, ed il suo diametro scorre per mezzo del moto dell' occhio sulle parti di quella cosa vista;

— la espressione figurativa delle forme delle cose è derivata dal punto, il quale è svolto in linea o in linee. E le figure sono composte di queste linee.

[2]) Il *punto principale* — o fisso — o soggetto — si trova al livello dell' occhio;

la *linea orizzontale* passa per il punto principale ed è detta anche *piramidale*, perchè in essa vi sono i vertici delle « piramidi ». Su questa linea si trovano, oltre i *terzi punti*, altri punti « ubi apparatus edificii plurium angulorum vel aliud quid situ diversum occurrerit »;

la *linea di terra* è una linea più bassa della *orizzontale*, sulla quale sono disposti punti separati, ad egual distanza gli uni dagli altri;

le *linee radiali* escono dai punti della linea piramidale come « i raggi procedono dal sole o dalle stelle » (cioè sono le proiettanti i punti della prospettiva di una figura). Fra le radiali si distinguono:

le *linee visuali*, ossia le linee laterali delle « piramidi » limitanti la prospettiva del soggetto;

e le *linee diametrali*, mediane delle visuali, cioè le « dividenti » in due parti eguali.

[3]) ... et toujours adeque en pareille haulteur lueil de lomme ...

splicita determinazione, ma per i *terzi punti* si può dubitare verosimilmente che egli non abbia saputo indicare con certezza come fissarli. Mi offermo su questo, perchè il Poudra asserisce, illustrando il *De Artificiali Perspectiva*, che i *terzi punti* sono scelti ad una distanza dal punto principale uguale alla distanza dell'occhio dal quadro [1]). Invece il Viator non afferma mai questo: scrive una prima volta che i *terzi punti* si trovano sulla linea orizzontale da una parte e dall'altra del punto principale, *ad egual distanza da esso* e « propiora in presenti et remotiora in distanti visu » (p. A_{iii}), e più innanzi ripete la stessa cosa con frasi analoghe; quindi la distanza è indicata vagamente e non viene data la regola tassativa che il Poudra riporta.

Il Viator considera, subito dopo, le figure elementari che, egli dice, *procedono tutte dalla sferica* (intende dal *cerchio*), *perchè il triangolo e il quadrato che principalmente servono alla prospettiva sono dedotti da quella;* e, a lor volta, *procedono dal triangolo le « piramidi »* [2]).

A queste ultime figure il Viator annette una grande importanza in quanto subordina ad esse la prospettiva di ogni oggetto, prospettiva da lui

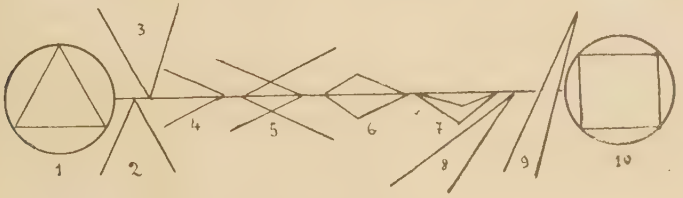


Fig. 1.

sempre concepita entro una o più di dette *piramidi*, e la classificazione che egli ne fa, veramente tutta personale [3]), è assai curiosa. La fig. 1 serve

[1]) Il Poudra scrive a pag. 134 della sua « Histoire de la Perspective » (Paris, 1864): « On prend sur la droite HH_1 d'horizon . . . , les trois points D , O , D_1 , tels « que $OD = OD_1$ et égale à la distance de l'oeil au tableau ».

[2]) Il Viator dice che dal triangolo procedono le « piramidi » che hanno similitudine di fiamma di fuoco: larga in basso e acuta in alto, e si possono tutte le dette « piramidi » fare più larghe o più strette, più lunghe o più corte a seconda dell'esigenza delle opere che si intraprendono . . . ; e i loro angoli, o punti, nascono dai punti assegnati sulla linea piramidale, eccetto per l'ultima piramide, il cui punto è librato in aria.

[3]) « Ce système de classement, qui lui est personnel et le distingue des autres « perspecteurs, est plus empirique que normal; mais il remplace de longues démon- « strations géométriques, se grave rapidement et pour toujours dans la mémoire et « suffit à la perspective de tableau ». Così G. Save (o. c. p. 69), il quale non è un matematico, ma un « artiste-peintre, décorateur ».

a illustrare le varie specie di *piramidi* [1]), i cui angoli dipendono dalla posizione che il vertice, scelto per lo più sulla linea piramidale, ha rispetto alla posizione dell'oggetto. L'Autore osserva che il diametro della *piramide* (o *triangolo visuale*) cade *drittamente* sulla *cosa considerata* se guardiamo quella cosa interamente e ugualmente da ogni parte; cade invece obliquamente quando la guardiamo in modo che una sua parte sia messa più in vista, e quando perciò rivolgiamo l'occhio da quella parte [2]). Il concetto è chiarito da tre disegni raccolti in un'unica figura (fig. 2) rappresentanti un tetragono « eretto » (parallelo al quadro) guardato o nel suo *insieme*, o volgendo l'occhio verso *l'angolo destro*, o verso il *sinistro*.

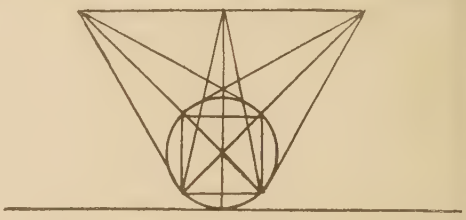


Fig. 2.

Più avanti si accenna in breve anche agli usi particolari di ogni *piramide* [3]), e le esemplificazioni riportate mettono bene in evidenza che queste piramidi sono per il Viator quello che per noi sono i coni proiettivi; però, descrivendole, egli le considera principalmente nel disegno, anzichè nello spazio. Infatti non parla delle successive operazioni che fanno giungere alla prospettiva dell'oggetto, ma piuttosto indica come si presenta la prospettiva nel disegno finito. In questo modo è trattato anche il problema fondamentale, quello della *degradazione* di un quadrato posto sul piano orizzontale, con un lato sulla linea di terra. Il Viator per questo problema si esprime semplicemente così :

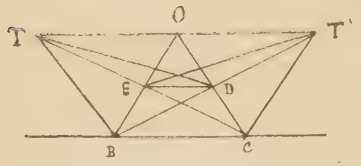


Fig. 3.

« La minoration du tetragone, cest à dire du quadrangle sterne et cou-
« chie, ou gisant en plain, se comprent par les lignes visuales cheans sur les
« angles di cellui inferiores et prochains ; et par les sections des diametres
« des piramides inclinees protendues des tiers points » e si riporta alla fig. 3 [4]).

[1]) 1. triangolo, 2. piramide dritta; 3. inversa; 4. giacente; 5. doppia; 6. diffusa; 7. bicorne o cornuta; 8. pendente; 9. aereale; 10. tetragono o tetrangolo.

[2]) p. A_{III}.

[3]) Si adopera la piramide *aereale* per digradare degli scalini. Trattandosi di una stanza vista di fronte, la piramide *dritta* ne costituisce il pavimento (ossia limita la prospettiva del pavimento); la *inversa*, la volta; due o più *giacenti*, le pareti. Per le figure viste non di fronte, vengono usate la piramide *diffusa* e la *bicorne*. La *pendente* è utile in varii casi. Per figure più complicate si adoperano parecchie di queste piramidi, come per formare le parole si adoperano più lettere.

[4]) La figura nel testo manca delle lettere.

La prospettiva, dunque, del tetragono «giacente», cioè la $BCDE$, è compresa tra le linee visuali OC e OB e le sezioni BD e EC dei diametri TC e $T'B$ delle *piramidi* inclinate, protese dai terzi punti T e T'.

L'Autore, cioè, avendo già due vertici B e C della prospettiva cercata, per trovare gli altri due che corrispondono a quelli « più lontani » del quadrato dato, traccia le visuali OB e OC, prospettive delle rette perpendicolari al quadro e concorrenti nel punto principale, e poi, servendosi dei terzi punti, determina la prospettiva $T'B$ e TC delle rette su cui stanno le diagonali del quadrato e che sono inclinate di 45° sul quadro. I punti d'incontro E e D della TC e della $T'B$ rispettivamente con la OB e con la OC danno i vertici cercati.

Risolto il problema fondamentale, il Viator riporta ad esso l'esecuzione della prospettiva di pavimenti [1]), di persone e di colonne, servendosi delle varie specie di *piramidi*, e per la prospettiva di ville, di chiese, di castelli ecc., dice soltanto che si devono disegnare *prima les plaines et plates-formes*, e poi da queste elevare gli edifici. Nelle tavole la prospettiva della pianta di ciascuno di questi, disegnata con l'aiuto dei terzi punti, è posta, per maggior chiarezza, più in basso della prospettiva di tutto l'edificio e il procedimento che l'Autore deve aver seguito per fare questi disegni, ma che non descrive, pare debba essere il seguente: dai singoli *angoli* della prima pianta si innalzano delle perpendicolari onde disegnare il contorno di una seconda pianta prospettiva, la quale serve di base all'edificio, e poi sulle stesse perpendicolari, a partire da questo contorno, si prendono le convenienti altezze [o direttamente o mediante *piramidi* adatte [2])] per completare la figura prospettiva dell'edificio [3]).

Alla fine del lavoro il Viator si scusa della mancanza di rifiniture nei disegni (le persone sono rappresentate solo con la linea del contorno) attribuendola a mancanza di spazio e all'aver voluto rendere più chiaro e più facile il concetto dell'arte e dell'opera; e giustifica le altre deficienze nell'esecuzione con il fatto che egli è vecchio (sta percorrendo la sessantina) e che gli incisori in legno non sono ancora ben perfezionati. Il testo si chiude con un inno di gloria a Dio e con i seguenti versi:

---

[1]) « La diminution du pavement se prent sur le dit quadrangle, parti de points, « et distinct de lignes radiales aux sections des diametres des piramides inclinees ».

[2]) Cf. p. A_{iii} recto, dove si parla della prospettiva delle persone e delle colonne.

[3]) A proposito del procedimento tenuto dal Viator nell'eseguire le prospettive dei corpi solidi, conviene osservare che il Poudra (o. c.) lo spiega servendosi di una figura che non si trova in nessuna edizione del *De Artificiali Perspectiva* e che è quindi una sua personale ricostruzione. Ciò non risulta chiaramente a chi legge la *Histoire de la Perspective*.

Inoltre il Poudra usa la frase « *proiezione orizzontale* » che il Viator non adopera mai.

Cellui qui a ce livre fait
Prie pour tous de cueur parfait
et supplie tres humblement
Prier pour lui pareillement.

Dall'esame dei disegni e del testo risulta che l'Autore pone sempre nelle più semplici posizioni, rispetto al quadro, gli oggetti di cui vuol trovare la prospettiva, e che non tratta le questioni più complicate, anzi per queste rimanda agli artifizi e all'erudizione dei più dotti e dei maestri in questa scienza (p. A_{iiii} recto); ma si vede pure che egli sa che le prospettive delle rette perpendicolari al quadro concorrono nel *punto principale*, che le prospettive delle rette orizzontali inclinate di 45° (come le diagonali del quadrato con un lato parallelo alla linea di terra) concorrono nei *terzi punti*, e si ha anche l'impressione che egli sia giunto ad intuire la esistenza sulla linea orizzontale di altri punti in cui concorrono le prospettive di rette aventi inclinazioni diverse dalle precedenti [1]).

Queste verità l'Autore non le enuncia esplicitamente, ma i singoli casi pratici che egli considera li risolve come se conoscesse queste proposizioni, oltre le quali pare non siano a lui note altre nozioni teoriche.

La divulgazione delle sopradette, senza dubbio importanti, che il Viator fece per primo, fu accolta tanto entusiasticamente che in poco tempo (sedici anni) il *De Artificiali Perspectiva* ebbe tre edizioni, oltre a varie contraffazioni, traduzioni e copie, tra cui la più caratteristica è quella inserita nella *Margarita philosophica* [2]).

Inoltre il *De Artificiali Perspectiva* fu lungamente usato come testo di prospettiva e tenuto in così gran conto che nel 1635, dopo più di un secolo dalla sua pubblicazione, a La Flèche, Mathurin Jousse [3]), ingegnere e architetto e quindi esperto, sentì ancora il bisogno di ristamparlo, naturalmente ampliandolo, « per la solidità della dottrina in esso contenuta ».

Più tardi quest'opera attirò l'attenzione dei bibliografi a cominciare da Mercier de Saint-Léger (1785) [4]), perchè essa rappresenta uno dei primi

---

[1]) V. nota [2]) p. 1; ... altri punti ci possono essere in quella linea *ubi a pparatus*..

[2]) G. Save indica alcuni traduttori e contraffattori del *De Artificiali Perspectiva* (pp. 66 e 67 o. c.) e relativamente alla *Margarita philosophica* di Grégoire Reisch, egli si riferisce alla terza edizione del 1508.

Nell'edizione del 1512 (Biblioteca del Deutches Museum di Monaco) il lavoro del Viator — riprodotto in latino con lo stesso titolo - si trova nell'appendice ed è inserito nel libro intitolato « Architettura », considerando la prospettiva come una parte di questa.

[3]) De Montaiglon, o. c., pp. 27 e segg.

[4]) De Montaiglon, o. c., p. 12; Beaupré, Brunet, Panzer, opere citate.

libri stampati in Lorena, e nel 1871 Adam Pilinski fece una riproduzione «fac simile» della seconda edizione.

Anche le tavole dei disegni, pare eseguiti dall'Autore stesso [1]) (sono figure impresse in legno a semplici tratti), hanno riscosso l'ammirazione di molti, e il De Montaiglon (o. c.) ne fa una minuziosa descrizione valendosi dell'edizione del 1509.

Fra gli storici moderni, oltre il Poudra (1864) (o. c.), c'è il Panofsky che nel suo *Dürers Kunsttheorie* (1915) Berlino, dà qualche giudizio importante sull'opera del Viator. Il Cantor [2]) non ne fa parola; il Loria ne cita solo il nome nella sua *Storia della descrittiva* e l'Amodeo [3]) la indica come interessante a studiarsi.

Infine merita rilevare che nel Deutsches Museum di Monaco, in una delle due sale contenenti la Collezione Matematica, là ove è posto in evidenza lo sviluppo storico della prospettiva, troviamo una tavola, la terza [4]), così intitolata: *Erstmalige Verwendung der Distanzpunkte als Fluchtpunkte der 45° Linien*; von Jean Pèlerin (Viator) geb. vor 1445; gest. 1524.

---

[1]) Clanché, o. c. p. 54.

[2]) Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig.

[3]) F. Amodeo, *Il primo sviluppo scientifico della Prospettiva atrofizzò lo sviluppo della Descrittiva*, 1932 Estratto dal vol. 62.° degli Atti dell'Accademia Pontaniana.

[4]) Oltre questa tavola contenente il problema fondamentale, ce n'è una seconda, dove sono riportate, dal *De Artificiali Perspectiva*, la prospettiva di una *torre a base quadrata* e la figura che serve a mostrare l'uso della piramide *bicorne*.

Le tavole che precedono queste relative al *De Artificiali Perspectiva*, sono due: la prima riporta una costruzione del Brunelleschi (1377-1446) e una di L. B. Alberti (1402-1477); la seconda una costruzione di Piero della Francesca (+ 1492). La tavola che segue immediatamente quelle relative al *De Artificiali Perspectiva*, è così intitolata: *Der Fluchtpunktsatz*, von Guido Ubaldi (1545-1607).

Contributo allo studio statico dei cilindri elastici soggetti a torsione, taglio e flessione. Precisazione e generalizzazione del concetto di centro di taglio.

Nota del socio corrispondente **Carlo Luigi Ricci**

(Adunanza del dì 12 giugno 1937 - XV)

Sunto. — *a*) Si precisa il concetto di *un asse di torsione assoluto* indipendente dal modo di vincolare la base tenuta fissa nel cilindro soggetto a torsione pura, e si stabilisce esplicitamente una proprietà invariantiva delle funzioni armoniche (coniugate) dalle quali dipende l'espressione analitica dello stato di tensione.

b) Si deducono direttamente con ragionamenti sintetici alcune proprietà statiche ed energetiche, che nei trattati sono dimostrate analiticamente, con applicazione del lemma di Green. Si espone poi una espressione semplicissima del fattore di torsione.

c) Si stabilisce l'espressione di uno stato di tensione generale corrispondente a torsione, taglio e flessione: tale espressione contiene come casi particolari quella del taglio e flessione (senza torsione), e — (con opportuno passaggio al limite) — quella della torsione pura.

d) Si rileva una semplicissima espressione, con significativa interpretazione geometrica, di taluni degli integrali di area che compaiono nel calcolo del momento delle tensioni tangenziali nello stato di tensione sopra descritto.

e) Si illustrano alcune significative proprietà nel calcolo del lavoro mutuo della flessione composta (flessione e taglio) combinata con la torsione semplice, ed in conseguenza si precisa, si discute e si generalizza il concetto di *centro di taglio*.

f) Si svolgono alcune considerazioni critiche con riferimenti bibliografici sull'argomento del *centro di taglio*.

A. — *Precisazione del concetto di* centro *e di* asse di torsione. *Proprietà invariantiva della funzione di flusso.*

Con riferimento ai più usuali trattati di elasticità tecnica, nonchè ad un mio precedente lavoro comparso su questi stessi *Rendiconti* [1]), richiamo qui le formule relative allo stato di deformazione e di tensione nel caso della torsione semplice.

---

[1]) Carlo Luigi Ricci, « *Precisazioni sul calcolo esatto delle tensioni tangenziali in un cilindro sollecitato a flessione, taglio e torsione* ». (Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, serie 4.ª, Vol. V, 13 aprile 1935 - VIII).

Componenti di spostamento:

$$\left.\begin{aligned} u &= -q\frac{M_z}{GI_p}\,z\,(y+a_1)\\ v &= \quad q\frac{M_z}{GI_p}\,z\,(x-b_1)\\ w &= \quad q\frac{M_z}{GI_p}\,[a_1x+b_1y-\Psi_1(xy)] \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Componenti di tensione:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= 0\\ \tau_{yz} &= -q\frac{M_z}{I_p}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}-x\right)\\ \tau_{zx} &= -q\frac{M_z}{I_p}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}+y\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

essendo notoriamente:

$$\Delta_2\Psi_1 = 0$$

nell'area della sezione e

$$\frac{d\Psi_1}{dn} = x\frac{dy}{dn}-y\frac{dx}{dn} \qquad (3)$$

sul contorno.

Ricordiamo che, dicendo $\bar{\tau}_z$ la tensione tangenziale totale, si ha:

$$\text{div}\ \bar{\tau}_z = 0 \quad ; \quad \text{rot}\ \bar{\tau}_z = q\frac{M_z}{I_p}\,.$$

Vincolando della base $z=0$ l'elemento contiguo all'origine O (scelto di solito nel baricentro della detta base), si deve poi avere:

$$(\Psi_1)_{x=y=0}=0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\right)_{x=y=0}=a_1 \quad ; \quad \left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}\right)_{x=y=0}=b_1 \qquad (4)$$

e finalmente si definisce il *fattore di torsione*:

$$q = \frac{I_p}{I_p - \int_A \left(x\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}-y\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\right)dA} \qquad (5)$$

essendo I_p il momento d'inerzia polare della base suddetta, rispetto al suo baricentro origine.

Di solito si considera come *centro di torsione* il punto O_1 che sulla

detta base ha le coordinate $x = b_1$ ed $y = -a_1$ e come *asse di torsione* la retta parallela all'asse z del cilindro e passante per il *centro di torsione* O_1. Infatti intorno a tale asse ruotano le sezioni trasversali del cilindro, come dimostrano le (1).

Però si deve notare che secondo le (2) nel punto $O_1(b_1, -a_1)$ *non* sono nulle le componenti della tensione tangenziale, poichè ivi le derivate parziali della Ψ_1 assumono dei valori in generale diversi da quelli assunti nell'origine O.

D'altra parte nei trattati, quantunque si ponga sempre il problema della torsione dichiarando di scegliere l'origine O degli assi nel baricentro della base, poi non si utilizza tale proprietà baricentrica dell'origine, di modo che tutte le proprietà statiche del descritto stato di tensione permangono inalterate anche qualora si assuma l'origine O sulla base vincolata, in un punto diverso dal baricentro della base stessa, di modo che le (2) riferite ad origini diverse rappresentano un unico stato di tensione, e conseguentemente le (1) pure riferite a diverse origini devono rappresentare spostamenti diversi, ma differenti fra loro per uno spostamento rigido.

È facile constatare che la posizione del centro di rotazione O_1 non può essere invariante rispetto alla scelta dell'origine O. Infatti se si sceglie un'altra origine O', (fissando l'elemento della base contiguo ad O'), lo spostamento rigido che bisogna sovrapporre a quello u, v, w, per trovare le u', v', w' che secondo le (1) corrispondono alla nuova origine, sarà individuato dalle componenti:

$$u'' = z\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{0'} \quad ; \quad v'' = z\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{0'} \quad ; \quad w'' = -(w)_{0'}$$

ove con l'indice $0'$ si indicano i valori assunti in O' dalle funzioni espresse secondo le (1) e riferite alla primitiva origine O.

Se ne deduce che in questo spostamento rigido la sezione generica, oltre ad una traslazione w'' parallela all'asse z, subisce pure una traslazione parallela al suo piano, proporzionale a z, come è pure la rotazione *rigida* rappresentata dalle prime due delle (1): questi due spostamenti (infinitesimi) notoriamente si compongono in una rotazione intorno ad un asse parallelo a z, ma *non* passante per O_1.

Perciò è chiaro che ad ogni elemento di area della base $z = 0$, il quale si assuma arbitrariamente come fisso, corrisponde un diverso centro di torsione.

In qualche trattato [2]) allo scopo di mettere le espressioni sotto forma

[2]) Cfr. p. es. Rudolf Girtler. « *Einführung in die Mechanik fester elastischer Körper und das zugehörige Versuchswesen* » (Julius Springer — Wien, 1931), Prima parte, cap. IV n. 23, pag. 92.

più semplice, si propone di assumere l'origine in O_1; in tal caso le espressioni (1) prendono la forma:

$$\left.\begin{aligned} u &= -q\,\frac{M_z}{GI_p}\,zy \\ v &= \quad q\,\frac{M_z}{GI_p}\,zx \\ w &= -q\,\frac{M_z}{GI_p}\,\Psi_1 \end{aligned}\right\} \qquad (1^{bis})$$

ove Ψ'_1 è una funzione armonica, perfettamente definita dalla nota condizione che il contorno sia una traiettoria di $\bar{\tau}_z$, e d'altra parte ovviamente deducibile dalla Ψ_1 precedente in base alla trasformazione di coordinate stabilita.

Per maggiore chiarezza è opportuno notare esplicitamente un fatto, che nei detti trattati è solo sottinteso e cioè che le espressioni (1^{bis}) si stabiliscono e sono valide, ritenendo che della base $z = 0$ l'elemento di area tenuto fisso sia ancora quello nell'immediato intorno del baricentro O della base stessa.

È naturale ora domandarsi se esiste su $z = 0$ un punto O_2, tale che quando si fissi l'elemento di base nell'intorno di O_2, il corrispondente centro di torsione sia ancora lo stesso O_2.

È facile constatare che *tale punto O_2 deve essere il punto di tensione nulla*, le cui coordinate, secondo le (2) soddisfano alle condizioni:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - x = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + y = 0$$

La retta parallela all'asse z, passante per questo punto O_2 come luogo dei punti di tensione nulla, e come *asse di rotazione delle sezioni nel caso in cui si fissi il suo punto di base O_2*, deve essere considerato il *vero e proprio asse di torsione*, esso si può denominare *asse di torsione assoluto*.

La determinazione di questo asse di torsione assoluto risulta anche più evidente ed agevole con la considerazione della funzione Φ_1 coniugata della Ψ_1 sopra considerata.

Infatti è noto [3]) che lo stato di tensione nel caso qui considerato si

[3]) Oltre agli usuali trattati di elasticità tecnica, cfr. p. es. Carlo Luigi Ricci. « *Complementi sul calcolo della distribuzione delle tensioni tangenziali in prismi soggetti a torsione od a taglio ecc.* » (su questo stesso volume di *Rendiconti*, febbraio 1937 - XV), formule (1), (2) e seguenti.

può rappresentare con:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{yz} &= \quad q\,\frac{M_z}{I_p}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + x\right) \\ \tau_{zx} &= -q\,\frac{M_z}{I_p}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + y\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2^{bis})$$

ove:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \qquad ; \qquad \Delta_2 \Phi_1 = 0$$

e sul contorno, a meno di costante arbitraria:

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad (6)$$

e ponendo:

$$F = \Phi_1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad (7)$$

le (2^{bis}) si possono scrivere:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{yz} &= \quad q\,\frac{M_z}{I_p}\,\frac{\partial F}{\partial x} \\ \tau_{zx} &= -q\,\frac{M_z}{I_p}\,\frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned}\right\} . \qquad (2^{ter})$$

Si ha: $\Delta_2 F = 2$. La F costituisce la *funzione di flusso* (o *di corrente*) del vettore $\overline{\tau}_z$ (di componenti τ_{zx} e τ_{yz}).

Si può assumere sul contorno:

$$F = 0.$$

Le linee $F =$ costante sono le traiettorie del vettore $\overline{\tau}_z$.

È facile verificare che essendo positivo il $\Delta_2 F$, che è proporzionale a rot $\overline{\tau}_z$, in armonia col noto *teorema di* STOKES, il flusso di $\overline{\tau}_z$ attraverso una traiettoria ortogonale a quelle delle $\overline{\tau}_z$ deve essere crescente procedendo dall'interno della sezione, verso il contorno, e perciò se si assume (com'è arbitrariamente lecito) $F = 0$ sul contorno, deve essere $F < 0$ nell'interno.

È pure nota l'analogia di PRANDTL [4]), secondo la quale il *diagramma spaziale* della F si può considerare come la superficie d'equilibrio di una lamina flessibile a tensione superficiale costante, vincolata al contorno e soggetta su una delle facce ad una pressione uniforme.

---

[4]) Cfr. August *und* Ludwig FÖPPL « *Drang und Zwang* ». (R. Oldenbourg, München und Berlin, 1928), Vol. II Cap IV, § 68, pag. 63-69.

È facile stabilire in proposito un'altra analogia del tipo di quella stabilita da GRIFFITH e TAYLOR per il caso del taglio [5]).

Infatti il diagramma spaziale della Φ_1 (di equazione $z = \Phi_1$), si può considerare come la superficie configurazione di equilibrio di una lamina flessibile a tensione superficiale costante e *con pressione nulla*, vincolata ad avere sul contorno le ordinate $z = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Con ciò la F è rappresentata geometricamente dai segmenti paralleli all'asse z, compresi tra la superficie rappresentativa della Φ_1 ed il paraboloide di rotazione di equazione: $z = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Orbene, è noto che l'ordinata parallela a z di un punto generico del detto paraboloide, contata a partire dal piano tangente ad esso in un suo punto qualunque P è ancora espressa da $-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, quando gli assi coordinati si traslino in modo che l'asse z passi per P; d'altra parte, per la simmetria di rotazione, l'orientazione della coppia ortogonale xy nel suo piano è indifferente.

Ne consegue che *i valori assunti dalla F nei varî punti della sezione sono invarianti rispetto alla scelta degli assi ortogonali xy nel piano della stessa.*

Con queste premesse risulta evidente che *il centro di torsione assoluto* O_2 sopra definito *è il punto in cui la F assume il valore assoluto massimo.*

Sarebbe facile verificare che per una sezione semplicemente connessa, ed a contorno convesso esiste uno ed un solo punto come O_2. Se il contorno è concavo, in modo che la sezione dei tratti mediani di minore ampiezza (quasi restringimenti o strozzature), si possono presentare anche due o più punti come O_2. ciascuno dei quali godrà delle proprietà enunciate. Le sezioni a connessione multipla (con cavità interne) possono fare eccezione, e non presentare nessun punto come O_2. I casi anomali qui accennati verranno trattati in altri lavori.

B. — *Dimostrazione sintetica diretta di alcune proprietà statiche ed energetiche. Speciale espressione e significato del fattore di torsione q.*

Nei trattati di solito si fanno applicazioni, relativamente laboriose del noto *lemma di* GREEN; 1.° per dimostrare che la risultante delle azioni

---

[5]) A. A. GRIFFITH *and* G. I. TAYLOR, « *The application of soap film to the determination of the torsion and flexure of hollow shafts* ». Technical report of the Advisory Committee for Aeronautics for 1917-18. London. Reports and Memoranda, n.° 392.

Idem, Idem, « *The problem of flexure and its solution by the soap film metod* ». Ibidem. Reports and Memoranda, n.° 399.

Cfr Giuseppe ALBENGA, « *Estensione dell'analogia di Prandtl* ». Annali dei Lavori Pubblici, Roma, agosto 1927 - V.

superficiali elementari distribuite secondo le (2) si riduce ad una sola coppia agente in un piano normale all'asse z; 2.° per ricavare l'espressione del lavoro di deformazione, come lavoro delle forze interne.

È facile ricavare questi due risultati direttamente con ragionamenti sintetici, senza far uso del predetto *lemma* Infatti:

1.° È noto che per la distribuzione di $\overline{\tau}_z$ espressa dalle (2), o (2^{bis}), o (2^{ter}) si ha:

$$\operatorname{div} \overline{\tau}_z = 0 \qquad \operatorname{rot} \overline{\tau}_z = q \frac{M_z}{I_p} = \text{costante.} \tag{8}$$

Per la prima di queste relazioni risulta che il flusso di $\overline{\tau}_z$ in una striscia di flusso compresa tra due traiettorie delle $\overline{\tau}_z$ è costante lungo la striscia stessa. Se consideriamo una striscia di flusso elementare di spessore dn, la forza tangenziale elementare, agente sull'elemento di area $dn\,ds$ (essendo ds la lunghezza dell'elemento stesso, misurata sulla *traiettoria media* della detta striscia) è: $\overline{\tau}_z\, dn\, ds$. Poichè il flusso $\tau_z\, dn$ è costante lungo la striscia considerata, le varie forze elementari della striscia stessa sono proporzionali ai *vettori* $\overline{ds}$, diretti tangenzialmente alla traiettoria media, e poichè questa è una linea chiusa, la risultante di traslazione delle dette forze elementari è nulla, e perciò le forze stesse si riducono ad una coppia. Lo stesso deve accadere per tutte le forze elementari agenti sulla sezione, poichè con strisce di flusso analoghe a quella considerata *si esaurisce* tutta la sezione.

Resta così data in via sintetica semplicissima la dimostrazione del 1.° asserto.

Inoltre si può ottenere una espressione particolarmente semplice del fattore di torsione q, con uno speciale, perspicuo, significato geometrico.

Infatti il momento dell'azione tangenziale elementare rispetto al *vero* centro di torsione O_s sopra definito è:

$$\tau_z\, dn \cdot ds \cdot h \qquad \text{(infinitesimo di 2.° ordine)}$$

ove h è la distanza normale di O_s dalla tangente alla traiettoria media della striscia di flusso considerata, in corrispondenza dell'elemento d'arco ds.

Sommando tutti gli analoghi momenti elementari di 2.° ordine per tutta la striscia di flusso si ottiene il contributo elementare di primo ordine che la striscia reca al momento torcente, cioè si ottiene, essendo $\tau_z\, dn$ costante lungo la striscia:

$$dM_z = \tau_z\, dn \cdot \int h\, ds$$

esteso l'integrale a tutta la striscia,

Orbene, questo integrale è evidentemente $2A'$, essendo A' l'area racchiusa entro la traiettoria media della detta striscia. D'altra parte il flusso elementare $\tau_z\, dn$, per il significato sopra illustrato della *funzione di flusso* F (7), è l'incremento infinitesimo dF della F tra le due linee di flusso (o traiettorie) che delimitano la detta striscia elementare, moltiplicato per $q\,\frac{M_z}{I_p}$. Si ha quindi:

$$dM_z = 2q\,\frac{M_z}{I_p}\,A'\,dF.$$

Il prodotto $A'\,dF$ è, in valore assoluto, l'elemento di volume dV del sopra indicato diagramma spaziale della F, elemento compreso tra i due piani paralleli alla sezione, di quote uguali rispettivamente ai valori di F corrispondenti alle due traiettorie limiti della striscia, (le quali sono *linee di livello* del detto diagramma spaziale di F).

Perciò, dall'ultima relazione, integrando a tutta la sezione e sopprimendo il fattore comune M_z, si trova:

$$1 = 2q\,\frac{V}{I_p}$$

essendo V il volume di tutto il detto diagramma spaziale, che si può esprimere:

$$V = -\int_A F\,dA.$$

(Il segno è giustificato dal fatto che F è zero sul contorno e negativa nell'interno della sezione, mentre V va computato in valore assoluto, com'è detto poco sopra).

È opportuno notare che la F, come la Φ_1 (e quindi come la Ψ_1) è *termine di secondo ordine rispetto alla lunghezza*, (ossia è il prodotto di due lunghezze), e perciò la V *è di quarto ordine*, e quindi omogenea con un momento d'inerzia di area.

In conseguenza si ha per il fattore di torsione q l'espressione seguente semplicissima ed assai significativa:

$$q = \frac{I_p}{2V}. \tag{9}$$

Questo valore, sostituito nelle (2ter), ci dà:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{M_z}{2V}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} \\ \tau_{xz} &= -\frac{M_z}{2V}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

espressioni delle tensioni tangenziali particolarmente notevoli, in quanto, oltre al momento torcente M_z, contengono solo elementi dipendenti dalla *funzione di flusso* F [6]).

Passiamo ora al 2.° punto propostoci in questo paragrafo:

2.° Il lavoro interno di deformazione per un prismetto elementare di 2.° ordine, con asse parallelo a z, di lunghezza l e di sezione $dn \cdot ds$, si può notoriamente esprimere come segue:

$$\frac{l}{2G}\tau_z^2\, dn \cdot ds = \frac{l}{2G}\tau_z\, dn \cdot \tau_z\, ds.$$

Ricordando che il flusso elementare $\tau_z\, dn$ si mantiene costante lungo la già illustrata *striscia* di flusso, il contributo che la stessa striscia, per tutta la lunghezza l del cilindro, reca al cercato lavoro di deformazione, si esprime:

$$dL = \frac{l}{2G}\tau_z\, dn \int \tau_z\, ds$$

intendendo l'integrale esteso a tutta la traiettoria media (chiusa) della detta striscia: esso integrale evidentemente è la circuitazione di τ_z lungo la detta traiettoria media; quindi per il noto *teorema di* Stokes e per la seconda delle (8) si ha:

$$\int \tau_z\, ds = 2q\frac{M_z}{I_p}A';$$

d'altra parte già abbiamo visto che

$$\tau_z\, dn = q\frac{M_z}{I_p}dF.$$

Sostituendo nella precedente espressione di dL si ha:

$$dL = \frac{l}{G}\left(q\frac{M_z}{I_p}\right)^2 \left[A'\,dF = dV\right];$$

integrando ora a tutte le strisce di flusso elementari in cui viene scomposta

[6]) L'espressione del momento M_z mediante il volume V ora definito era già stata data nell'opera dei Föppl citata nella nota [4]), Vol. II, cap. VI, § 68, pag. 68, formula (50): la dimostrazione sintetica da noi qui esposta è però diversa da quella dei Föppl; inoltre nell'opera citata non si fa cenno dell'espressione del fattore di torsione (9) nè della nuova forma (10) delle componenti di tensione tangenziale.

la sezione, e tenendo conto della (9), si ottiene:

$$L = q \frac{M_z^2 l}{2GI_p}.$$

Si è così dimostrata per via sintetica semplicissima la ben nota espressione del lavoro di deformazione, che — come lavoro di forze interne — negli usuali trattati vien dimostrata con laboriosa applicazione del *lemma di* GREEN.

Si può ottenere una nuova, significativa espressione di L, sostituendo nella precedente il valore di q dato dalla (9): e si trova:

$$L = \frac{M_z^2 l}{4GV}\ ; \qquad (11)$$

anche questa, come le (10), notevole perchè immediatamente calcolabile con la *sola* conoscenza della *funzione di flusso* F.

C. — *Espressione generale sintetica dello stato di deformazione e di tensione corrispondente a taglio, flessione e torsione simultanei.*

Dagli usuali trattati di elasticità tecnica sono ben note le espressioni delle componenti di spostamento e di tensione per quel tipo di sollecitazione che solitamente vien designato come *flessione composta*, od anche *flessione e taglio*. Esse sono state riportate (a titolo di riferimento e per comodità di citazione) nel mio lavoro « *Precisazioni sul calcolo esatto delle tensioni tangenziali ecc.* » citato nella nota [1]), comparso su questi stessi « Rendiconti », e precisamente sono le formole (6) per gli spostamenti e (7) per le tensioni, a pag. 5 dell'estratto del lavoro stesso, al quale rimandiamo per tutte le indicazioni relative ai simboli, nonchè alle modalità di vincolo. Le formule stesse e le seguenti verranno nel séguito designate con (6) $P.$, (7) $P.$, e simili.

Si deve poi tener presente che nel § II del citato lavoro « *Precisazioni...* » a pag. 5 e 6 (dell'estratto) è stata riscontrata la validità delle (6) $P.$ e (7) $P.$ per un asse neutro x comunque diretto, mentre esse negli usuali trattati vengono stabilite nell'ipotesi esclusiva che gli assi x ed y coincidano con quelli principali d'inerzia della sezione.

Le nuove espressioni che qui vogliamo proporre ed illustrare si possono ottenere da quelle ora citate, procedendo come segue:

Per le componenti di spostamento ai secondi membri delle prime due delle (6) $P.$ aggiungiamo rispettivamente le quantità:

$$-\frac{T_y}{EI_x} \cdot \frac{\delta}{m} yz \qquad \text{e} \qquad \frac{T_y}{EI_x} \cdot \frac{\delta}{m} xz\,,$$

ove i simboli sono i soliti ben noti, e δ è una lunghezza, il cui significato

verrà precisato tra breve; poi si lasci inalterata la terza delle (6) *P.*, salvo l'unica variante costituita dalla $\Psi_{2(xy)}$, che verrà determinata da una condizione al contorno diversa da quella esposta nelle (8) *P.* del citato lavoro.

Per le componenti di tensione si lasci inalterata la prima delle (7) *P.*, mentre ai secondi membri delle altre due si aggiungano rispettivamente le quantità:

$$\frac{m}{2(m+1)} \cdot \frac{T_y}{I_x} \cdot \frac{\delta}{m} x \quad \text{e} \quad -\frac{m}{2(m+1)} \cdot \frac{T_y}{I_x} \cdot \frac{\delta}{m} y.$$

Con ciò si ottengono le espressioni seguenti:

Componenti di spostamento:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{T_y}{EI_x}\left[\frac{xy}{m}(l-z) - \left(\frac{\delta}{m}y - a_2\right)z\right] \\ v &= \frac{T_y}{EI_x}\left[\left(z^2 - \frac{x^2-y^2}{m}\right)\frac{l}{2} - \left(\frac{z^2}{6} - \frac{x^2-y^2}{2m} - \frac{\delta}{m}x - b_2\right)z\right] \\ w &= \frac{T_y}{EI_x}\left[\frac{yz^2}{2} - yx^2 - lyz + \Psi_{2(xy)} - a_2 x - b_2 y\right] \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Componenti di tensione:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{T_y}{I_x}(z-l)\,y \\ \tau_{yz} &= \frac{m}{2(m+1)} \cdot \frac{T_y}{I_x}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m}x^2 - \frac{1}{2m}y^2 + \frac{\delta}{m}x\right) \\ \tau_{xz} &= \frac{m}{2(m+1)} \cdot \frac{T_y}{I_x}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{2m+1}{m}xy - \frac{\delta}{m}y\right) \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

La $\Psi_{2(xy)}$ deve essere una funzione armonica ($\Delta_2 \Psi_2 = 0$) nella sezione, ed al contorno deve soddisfare alla condizione:

$$\frac{\partial \Psi_2}{dn} = \left(\frac{2m+1}{m}xy + \frac{\delta}{m}y\right)\frac{dx}{dn} + \left(\frac{2m-1}{2m}x^2 + \frac{1}{2m}y^2 - \frac{\delta}{m}x\right)\frac{dy}{dn} \qquad (14)$$

(desunta dal fatto notorio che sul contorno le tensioni tangenziali devono essere tangenti al contorno stesso).

Nell'origine-baricentro O (il cui immediato intorno s'intende vincolato, nel modo usato nel problema di De Saint Venant) si deve avere:

$$u = v = w - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

condizioni che sono tutte soddisfatte dalle (12), com'è facile verificare,

purchè si ponga pure in O: $\Psi_{2(0,0)} = 0$ ed anche:

$$\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\right)_{(00)} = a_2 \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y}\right)_{(00)} = b_2 .$$

Può essere opportuno introdurre anche la funzione armonica Φ_2, *coniugata della* Ψ_2, e definita, com'è ben noto, dalle relazioni:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}$$

mentre al contorno la Φ_2 assume i valori espressi da:

$$\Phi_2 = [\Phi_2]_0 - \frac{2m-1}{6m} x^3 - \frac{1}{2m} \int_0^s y^2 \, dx + \frac{2m+1}{m} \int_0^s xy \, dy + \frac{\delta}{2m} (x^2 + y^2) \qquad (15)$$

dove $[\Phi_2]_0$ è il valore di Φ_2 in un punto del contorno, ove sia $x = 0$, dal quale punto si conta sul contorno stesso, partendo nel senso delle x crescenti e proseguendo ciclicamente, l'arco s, al quale sono estesi i due integrali a secondo membro, i quali sono integrali di linea calcolati lungo il contorno stesso. (Sono ovvî i significati geometrici di questi integrali). — Per il calcolo numerico può talora essere preferibile, anzichè determinare direttamente la Ψ_2 secondo la (14), calcolare invece prima la Φ_2 secondo la (15); la Ψ_2 si può poi comodamente ricavare come funzione coniugata della Φ_2.

Si noti che le Ψ_2 e Φ_2 sono *termini di terzo ordine* rispetto alla lunghezza.

Dalle ultime due delle (13) è facile ricavare:

$$\operatorname{div} \bar{\tau}_z = -\frac{T_y}{I_x} y \qquad ; \qquad \operatorname{rot} \bar{\tau}_z = \frac{T_y}{2(m+1) I_x} (x + \delta); \qquad (16)$$

sono così verificate le due ben note condizioni, a cui deve soddisfare la distribuzione delle $\bar{\tau}_z$ nel problema di De Saint Venant; condizioni che sono state riportate a pag. 3 dell'estratto del mio lavoro « *Precisazioni ecc...* », già sopra citato.

La seconda delle (16) *serve poi a precisare il significato della lunghezza* δ *introdotta nelle espressioni* (12) e (13). *Infatti* rot $\bar{\tau}_z$ *si annulla per* $x + \delta = 0$, *cioè nei punti di ascissa* $x = -\delta$, *i quali stanno su una retta, — che diremo* r_0 —, *normale all'asse neutro* x.

Dunque, ricapitolando, le espressioni (12), (13), (14) e (15) rappresentano la forma più generale della sollecitazione, le cui tensioni interne soddisfano alle (16) (equazioni di equilibrio e di congruenza — v. p. es. lavoro citato in nota [1])) ed alla ben nota condizione al contorno.

Il parametro δ *che in essa compare, cambiato di segno, ci dà l'ascissa*

della retta r_0 *(parallela ad* y*), sulla quale si annulla la* rot $\vec{\tau}$, *espressa dalla seconda delle* (16).

Per $\delta = 0$ si ricade nel caso particolare *flessione e taglio*, in quanto le (12) e (13) si trasformano rispettivamente nelle (6) *P.* e (7) *P.*, sopra citate.

Indicheremo qui con u', v', w', τ'_{yz}, τ'_{zx} i valori di u, v, w, τ_{yz}, τ_{zx} per questo caso. $\delta = 0$; così pure siano Ψ'_2 e Φ'_2 le funzioni armoniche soddisfacenti le (14) e (15), per $\delta = 0$.

Allora si potrà porre:

$$u = u' + u'' \quad ; \quad v = v' + v'' \quad ; \quad w = w' + w''$$
$$\tau_{yz} = \tau'_{yz} + \tau''_{yz} \quad ; \quad \tau_{zx} = \tau'_{zx} + \tau''_{zx}$$
$$\Psi_2 = \Psi'_2 + \Psi''_2 \quad ; \quad \Phi_2 = \Phi'_2 + \Phi''_2$$

esprimendo le grandezze con due apici $''$ come segue:

$$\left.\begin{aligned} u'' &= -\frac{T_y \delta}{E I_x m}\left(y - \frac{m}{\delta}\, a''_2\right) z \\ v'' &= \frac{T_y \delta}{E I_x m}\left(x + \frac{m}{\delta}\, b''_2\right) z \\ w'' &= \frac{T_y \delta}{E I_x m}\left(\frac{m}{\delta}\, \Psi'_2 - \frac{m}{\delta}\, a''_2 x - \frac{m}{\delta}\, b''_2 y\right) \end{aligned}\right\} \qquad (12^{bis})$$

$$\left.\begin{aligned} \tau''_{yz} &= \frac{\delta}{2(m+1)} \cdot \frac{T_y}{I_x}\left(\frac{m}{\delta}\frac{\partial \Psi''_2}{\partial y} + x\right) \\ \tau''_{zx} &= \frac{\delta}{2(m+1)} \cdot \frac{T_y}{I_x}\left(\frac{m}{\delta}\frac{\partial \Psi''_2}{\partial x} - y\right) \end{aligned}\right\} \qquad (13^{bis})$$

ove $\Delta_2 \Psi'_2 = 0$ nella sezione,

mentre sul contorno:

$$\frac{m}{\delta}\frac{d\Psi'_2}{dn} = y\frac{dx}{dn} - x\frac{dy}{dn} \qquad ; \qquad (14^{bis})$$

inoltre la funzione Φ''_2 coniugata di Ψ''_2 al contorno soddisfa la condizione:

$$\frac{m}{\delta}\Phi''_2 = \frac{m}{\delta}[\Phi''_2]_0 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad (15^{bis})$$

$$\{\text{ove } [\Phi''_2]_0 \text{ è arbitrario}\},$$

dovendo poi essere nell'origine:

$$[\Psi'_2]_{00} = 0 \quad ; \quad \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right]_{00} = a''_2 \quad ; \quad \left[\frac{\partial \Psi'_2}{\partial y}\right]_{00} = b''_2 .$$

Si verifica immediatamente che, ove si ponga:

$$\Psi_1 = -\frac{m}{\delta}\Psi''_2 \quad ; \quad \Phi_1 = -\frac{m}{\delta}\Phi''_2$$

$$q\frac{M_z}{I_p} = \frac{T_y\delta}{2(m+1)I_x} \tag{17}$$

le (12bis), (13bis), (14bis) e (15bis), si identificano rispettivamente con le (1), (2), (3) e (6); il che prova che le $u''\ldots$, $\tau''_{yz}\ldots$ rappresentano *una torsione*: il *momento torcente relativo* si può porre sotto la forma: $M_z = T_y x_0$, indicando con x_0 la distanza misurata parallelamente all'asse neutro x, tra le linee d'azione (parallele) delle due risultanti rispettivamente delle distribuzioni delle $\overline{\tau}_z$ secondo le (13) e delle τ'_z (per $\delta = 0$) secondo le già citate (7) *P*. (Notando che quest'ultima in generale non passa per *O*, come riconosceremo più innanzi). Sostituendo tale espressione di M_z nell'ultima relazione soprascritta e tenendo conto della (9), si trova con facili riduzioni:

$$x_0 = \frac{V}{(m+1)I_x}\delta \tag{17bis}$$

e così si esprime il *braccio di leva* x_0 proporzionalmente al parametro δ sopra illustrato.

Sarebbe poi facile verificare che al crescere di δ, il valore di T_y, raggiungibile con assegnati valori di $\overline{\tau}_z$ in determinati punti della sezione, va diminuendo, in modo che se δ diventa infinito, T_y diventa infinitesimo dello stesso ordine, sicchè il prodotto $T_y\delta$ od anche $T_y x_0 = M_z$ risulta finito; in tal caso le $u'\ldots$, $\tau'_{yz}\ldots$ svaniscono, e si ricade, con le sole $u''\ldots$, $\tau''_{yz}\ldots$ nel caso particolare della sola torsione.

È istruttivo ricavare dalle (12) la componente r secondo z, della *rotazione* (o del *vorticale*) del vettore spostamento u, v, w, secondo la ben nota relazione:

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

eseguendo le derivazioni si trova:

$$r = \frac{T_y}{mEI_x}[(z-l)x + \delta z] \tag{17ter}$$

che, per $\delta = 0$ dà in particolare la relazione già ricavata a pag. 8 del mio lavoro « *Precisazioni* » già citato nella nota [1]).

Si noti poi che per $z = l$, tenute presenti la nota relazione tra G ed E.

e la (17), si trova successivamente:

$$r = \frac{T_y \delta \cdot l}{m E I_x} = \frac{T_y \delta \cdot l}{2(m+1) G I_x} = q \frac{M_z l}{G I_p} = \vartheta$$

cioè si ritrova la notissima espressione della rotazione rigida ϑ della base $z = l$ per il momento torcente M_z; quindi su detta base *la rotazione* (costante) *è dovuta alla sola torsione* M_z, in armonia con ciò che è stato riconosciuto nella sopra citata pag. 8 dell'opuscolo « *Precisazioni* ... ».

Così dunque abbiamo stabilito un'unica espressione sintetica generale per *la sollecitazione di flessione, taglio e torsione simultanei*, e ne abbiamo analizzate le principali modalità.

Nella espressione stessa, come pure in quelle usuali esposte nei trattati per la torsione e per la flessione e taglio, abbiamo immaginato di tener fisso della base $z = 0$ l'elemento di area nell'immediato intorno dell'origine O, baricentro della sezione. È bensì vero che, ai fini della determinazione delle tensioni interne, la scelta dell'elemento fissato è affatto arbitraria; pur tuttavia la scelta qui fatta, oltre che la più usuale, è anche la più opportuna, in quanto permette di confrontare e di sovrapporre le componenti di spostamento dovute a varie sollecitazioni del tipo ora studiato, e *corrispondenti a diversi assi neutri* (da assumersi, caso per caso ognuno come asse delle x per le espressioni (12) e (13), corrispondenti a sforzi di taglio in diverse direzioni), in quanto notoriamente tali assi neutri passano tutti per il baricentro O della sezione.

È opportuno poi notare ancora che la distribuzione di tensioni τ, rappresentata dalle (13), (14) e (15) per $\delta = 0$, è sostanzialmente la stessa di quella rappresentata dalle (20) e (21) dell'altro mio precedente lavoro, comparso su questo stesso volume dei « Rendiconti », sotto il titolo « *Complementi sul calcolo della distribuzione delle tensioni tangenziali in prismi soggetti a torsione od a taglio, ecc.* ... » citato nella nota [3]).

L'apparente disparità è puramente formale ed è dovuta ad un diverso modo di usare l'introduzione di appropriate funzioni armoniche, allo scopo di soddisfare le condizioni essenziali, che sono le (16), ed il fatto che il contorno deve essere traiettoria di tensioni tangenziali τ. Queste condizioni si possono dunque soddisfare con varie espressioni delle τ_z, solo formalmente diverse, ma sostanzialmente identiche, in quanto rappresentano tutte la stessa effettiva distribuzione di tensioni tangenziali τ_z. Anche le varie corrispondenti espressioni degli spostamenti sono sostanzialmente identiche sempre quando sia lo stesso l'elemento della base $z = 0$ che si tiene fisso. Qualora poi si fissassero volta a volta elementi diversi, si otterrebbero spostamenti bensì diversi, ma differenti fra loro per spostamenti rigidi, notoriamente privi d'influenza sulla distribuzione delle tensioni interne.

D'altra parte si osservi che le note condizioni di vincolo:

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

(a realizzarsi nel punto scelto come centro dell'elemento di area $z = 0$ da vincolare, altro non sono sostanzialmente che delle condizioni analitiche e geometriche, atte a definire la posizione del cilindro deformato, (con l'eventuale sovrapposizione di uno spostamento rigido arbitrario).

Perciò, quando riesca comodo od opportuno, si può stabilire di realizzare le sopra trascritte condizioni in un punto anche eventualmente *situato fuori dell'area limitata della base* $z = 0$ del cilindro, sempre quando gli spostamenti $u\,v\,w$ vengano rappresentati con *funzioni definite anche fuori dell'area suddetta.*

Resta quindi chiarito che l'arbitrarietà della scelta dell'elemento di area $z = 0$ da vincolare, non subisce restrizioni di sorta.

D. — *Espressione ed interpretazione geometrica di taluni elementi del calcolo di momenti delle forze tangenziali.*

Le forze tangenziali elementari distribuite secondo le ultime due delle (13) hanno una risultante perfettamente individuata in direzione ed intensità: infatti notoriamente la sua direzione è quella coniugata dell'asse x rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione; quanto poi alla sua intensità, è ovvio che questa è determinata dalla sua detta direzione e dalla T_y, sua componente ortogonale secondo l'asse y.

Per individuarne anche la posizione occorre calcolarne il momento M_z rispetto all'asse z, e questo notoriamente è espresso da:

$$M_z = \int_A (\tau_{yz} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y)\, dA = T_y \cdot d \qquad (18)$$

esteso l'integrale a tutta l'area della sezione, ed indicando con d la distanza tra O ed il punto R, in cui la detta risultante incontra l'asse x.

Nel calcolare il detto integrale, dopo aver fatte le sostituzioni (13), si incontrano varî integrali di area, di ben nota interpretazione geometrica, in quanto essi sono momenti di varî ordini rispetto all'uno od all'altro degli assi coordinati o rispetto ad entrambi.

Oltre a questi, resta da calcolare e da interpretare geometricamente l'integrale:

$$\mathcal{J} = \int_A \left(x \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) dA$$

il quale si può anche esprimere mediante la funzione armonica Φ_2, coniugata della Ψ_2 e definita sul contorno dalle (15):

$$\mathcal{J} = -\int_A \left(x \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) dA. \tag{19}$$

Richiamiamo le ovvie identità:

$$x \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\Phi_2) - \Phi_2 \quad ; \quad y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y\Phi_2) - \Phi_2$$

e sostituiamo nell'espressione precedente: si ottiene così:

$$\mathcal{J} = 2\int_A \Phi_2 dA - \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(x\Phi_2) + \frac{\partial}{\partial y}(y\Phi_2) \right] dA.$$

Il secondo di questi integrali si può trasformare in integrale di linea lungo il contorno s, mediante la ben nota *formola di* GAUSS, a due dimensioni, e si trova in tal modo:

$$\mathcal{J} = 2\int_A \Phi_2 dA + \int_s \Phi_2 [x\cos(nx) + y\cos(ny)]\, ds. \tag{20}$$

Il primo di questi integrali, cioè l'$\int_A \Phi_2 dA$ ha interpretazione ovvia: *esso è il volume del diagramma spaziale della funzione* Φ_2. Poichè questa è del 3.° ordine, tale volume è di 5.° ordine.

Per ciò che riguarda il secondo integrale, osserviamo che il binomio entro parentesi [ ] è la distanza dell'origine O dalla tangente al contorno in corrispondenza dell'elemento ds; il prodotto della detta distanza per l'archetto ds è evidentemente il doppio dell'area infinitesima di primo ordine, del settore ottenuto proiettando da O gli estremi dell'archetto ds.

Consideriamo ora il contorno od *ordo* s_1, (situato sulla superficie esterna del cilindro considerato), del sopra detto diagramma spaziale della Φ_2, limitato ai punti della sezione; per il punto generico S_1 di s_1 conduciamo la retta r_1 normale ed incidente all'asse z; al variare di S_1 su s_1 la r_1 descrive o genera una rigata che diremo $\mathfrak{R}$.

Ciò posto, risulta ovviamente che *il secondo degli integrali che compaiono nella* (20) *è uguale al doppio del volume compreso tra la superficie esterna del cilindro, la sezione considerata, e la rigata* $\mathfrak{R}$ *sopra definita*. Anche questo volume è del 5.° ordine.

Questi risultati sono notevoli per la loro semplicità e perchè fanno dipendere l'integrale $\mathcal{J}$ in modo ovvio e geometricamente definito con chiarezza, da soli elementi relativi al diagramma spaziale della funzione Φ_2.

Anche al caso della pura torsione si possono applicare criterî analoghi, quanto il denominatore della (5), con l'introduzione delle funzioni Φ_1 ed F pra a suo luogo definite, si può esprimere:

$$D = \int_A \left(x \frac{dF}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dA.$$

Applicando a questa la stessa trasformazione or ora usata per la (19), i osservando che sul contorno si è assunto $F = 0$, esso si riduce a:

$$D = -2 \int_A F dA = 2V$$

icordando la formula che precede la (9), nel paragrafo B).

Con ciò la (5) si trasforma nella (9), la quale così resta, anche per altra a, ridimostrata e confermata [7]).

. — *Calcolo del lavoro mutuo delle due sollecitazioni di flessione composta (flessione e taglio) e di torsione semplice.*
osizione della risultante delle forze tangenziali per la flessione composta, per varie direzioni dell' asse neutro x.

Ancora allo scopo di determinare la posizione della risultante delle zioni tangenziali (13) ed il relativo *braccio di leva* d_1 *misurato secondo asse x* rispetto al centro di torsione O_1 (relativo al baricentro O; v. pagr. A), e sopratutto al fine di investigare come varii lo stesso d_1 al variare lla direzione dell' asse neutro x (baricentrico) è opportuno calcolare il *voro mutuo* di questa sollecitazione, combinata con una torsione semplice.

Calcoliamo dapprima questo lavoro mutuo come lavoro virtuale L_i delle rze interne; poi uguagliandone la relativa espressione a quella del lavoro rtuale L_e delle forze esterne, agenti sulle due basi del cilindro, troveremo lle relazioni risolutive per il problema qui posto.

Per quanto forse superfluo, riteniamo per maggior chiarezza opportuno chiamare che le σ_z dovute alla flessione composta, *non* compiono lavoro nterno) per effetto della torsione, in quanto questa *non* provoca dilatazioni diverse da zero.

Indichiamo qui con $\overline{\tau}'_z$ e $\overline{\tau}''_z$ le tensioni tangenziali rispettivamente re- tive alla flessione composta secondo le (13), ed alla torsione semplice se- ondo p. es. le (10).

---

[7]) La dimostrazione qui esposta equivale sostanzialmente a quella data dai ÖPPL nel luogo citato nella nota [6]), per l'espressione di M_z mediante V. Però noi abbiamo qui ricavata come caso particolare di una relazione analitica più generale spressa dalle (19) e (20), non considerata nell'opera dei FÖPPL.

Il lavoro mutuo o virtuale per un prisma retto elementare di secondo ordine, di base $dn \cdot ds$ e di altezza l, è, com'è ben noto:

$$\frac{l}{G} \cdot \overline{\tau}'_z \times \overline{\tau}''_z \, dn \cdot ds.$$

L'archetto ds appartenga ad una linea di flusso (o traiettoria) di $\overline{\tau}''_z$, dovuta cioè alla torsione, il cui momento torcente indicheremo con M_t; dn sarà lo spessore di una striscia elementare di flusso relativa alla torsione. Sommiamo tutti i contributi come il precedente, estendendo a tutta la detta striscia e troviamo così il contributo di tutta la striscia (infinitesimo di primo ordine):

$$dL_i = \frac{l}{G} \int_s \overline{\tau}'_z \times \overline{\tau}''_z \, dn \, ds.$$

Com'è noto, per la torsione il flusso elementare $\tau_z \, dn$ è costante per tutta la striscia, e perciò, tenendo anche presenti le (10), si può scrivere:

$$dL_i = \frac{l}{G} \tau''_z \, dn \int_s \overline{\tau}'_z \times \overline{d\,s} = \frac{M_t \, l}{2\,G\,V} \, dF \int_s \overline{\tau}'_z \times \overline{d\,s}.$$

L'integrale a secondo membro è la circuitazione del vettore $\overline{\tau}'_z$ lungo la traiettoria media della striscia di flusso-torsione sopra detta; perciò, per il *teorema di* Stokes e per la seconda delle (16), si ha:

$$dL_i = \frac{M_t \, l}{2\,G\,V} \cdot \frac{T_y}{(m+1)\,I_x} \cdot dF \cdot \int_{A'} (x + \delta) \, dA,$$

esteso l'integrale a tutta l'area A' racchiusa nella traiettoria s sopra specificata. Il prodotto dell'integrale stesso per dF è il momento statico del volume elementare di 1.° ordine dV, rispetto al piano parallelo a z, passante per la retta r_0 determinata da $x + \delta = 0$. L'elemento di volume dV è quello stesso definito, nel paragrafo *B*, a proposito del calcolo del dM_z per la pura torsione; la retta r_0 è già stata definita nel paragrafo *C*, poco dopo le (16).

Integriamo ora a tutte le strisce elementari di flusso torsione in cui s'immagina scomposta, ad esaurimento, la sezione, ed indichiamo con x_{vt} l'ascissa del baricentro G_{vt} del volume V del diagramma spaziale della F (funzione di flusso per la torsione). Con ciò, tenendo presente la ben nota relazione tra G ed E, si ottiene infine, dopo facili riduzioni:

$$L_i = \frac{M_t \, T_y \, l}{m \, E \, I_x} (x_{vt} + \delta). \tag{21}$$

È opportuno tener presente che, in conseguenza della già riconosciuta

invarianza della F, anche il volume V ed il suo baricentro G_{vt} sono invarianti per qualsiasi trasformazione delle coordinate ortogonali xy.

Questo lavoro deve, com'è noto, essere uguale al lavoro mutuo o virtuale L_e delle forze esterne, le quali agiscono sulle due basi del cilindro, e tenendo presente che sulla base $z = 0$ vincolata si devono ritenere distribuite delle tensioni uguali ed opposte a quelle date per $z = 0$ dalle espressioni sopra studiate.

Calcoliamo tale lavoro come quello delle forze dovute alla flessione composta, per gli spostamenti dovuti alla torsione pura di momento torcente M_t, (in armonia con il teorema di reciprocità).

1.° *Lavoro sulla base* $z = l$, *libera e caricata.*

Le tensioni normali σ_z dovute alla flessione composta su detta base sono ovunque nulle, come risulta dalla prima delle (13), e perciò il loro lavoro è nullo.

Per ciò che riguarda il lavoro delle forze tangenziali sulla stessa base $z = l$, si osservi che tali forze compiono lavoro per gli spostamenti u e v dovuti alla torsione, *i quali sono quelli di una rotazione rigida intorno all'asse di torsione*, (relativo ad O) per un'ampiezza angolare ϑ, che, secondo le (1), e tenuta presente la (9) è:

$$\vartheta = \frac{M_t\, l}{2\, G\, V}\,.$$

Perciò, se indichiamo con d_1 la distanza, misurata parallelamente all'asse x, tra il centro di torsione O_t (relativo ad O; v. paragrafo A), avremo:

(*Lavoro forze taglio per spostamenti torsione sulla base* $z = l$) =

$$= T_y\, d_1\, \vartheta = \frac{M_t\, T_y\, l\, d_1}{2\, G\, V}\,. \tag{22}$$

2.° *Lavoro sulla base* $z = 0$, *vincolata e soggetta alle reazioni* $-\sigma_z$, $-\tau_{yz}$, $-\tau_{zx}$ *per* $z = 0$.

Gli spostamenti u e v dovuti alla torsione, per $z = 0$ sono nulli, come risulta dalle (1); perciò su $z = 0$ il lavoro delle $-\overline{\tau}_z$ dovute al taglio è nullo.

Le $-\sigma_z$ dovute al taglio, lavorano in virtù degli spostamenti w dovuti alla torsione, secondo la terza delle (1). Per la prima delle (13), per $z = 0$ si ha:

$$-\sigma_z = \frac{T_y\, l}{I_x}\, y.$$

Ne consegue:

(Lavoro esterno forze-taglio per spostamenti-torsione sulla base $z = 0$) =

$= \dfrac{T_y\, l}{I_x} \times$ (Momento statico rispetto al piano xz del volume generato dall'in-

gobbimento della stessa base $z = 0$ per effetto della torsione) =

$$= \frac{T_y M_t l}{2 G I_x V} \mathcal{M}_{wt} = \frac{T_y M_t l}{2 G I_x V} \mathcal{V}_{wt} \cdot y_{wt} \tag{23}$$

avendo indicato con $\mathcal{V}_{wt}$ il volume del diagramma spaziale della parentesi nella terza delle (1), con y_{wt} la coordinata y del baricentro dello stesso volume, e con $\mathcal{M}_{wt}$ il relativo momento statico rispetto al piano xz. ($\mathcal{V}_{wt}$ è termine del 4.° ordine).

Dalle (22) e (23) si ricava dunque:

$$L_e = \frac{T_y M_t l}{2 G V} \left(d_1 + \frac{\mathcal{V}_{wt}}{I_x} y_{wt} \right). \tag{24}$$

D'altra parte è ben noto che: $L_e = L_i$ [anche in segno, poichè i varî contributi a questi lavori si assunsero positivi per forze-taglio e spostamenti (o scorrimenti)-torsione dello stesso verso].

Perciò, dalle (21) e (24), soppressi i fattori comuni, si ha:

$$\frac{a_{vt} + \delta}{m E I_x} = \frac{1}{2 G V} \left(d_1 + \frac{\mathcal{V}_{wt}}{I_x} y_{wt} \right). \tag{25}$$

Risolvendo poi rispetto a d_1 e ricordando la notissima relazione tra G ed E, si trova infine:

$$d_1 = \frac{1}{I_x} \left[\frac{V}{m+1} (x_{vt} + \delta) - \mathcal{V}_{wt} y_{wt} \right]. \tag{26}$$

Questa relazione permette di ricavare in modo assai semplice e geometricamente significativo il già definito braccio di leva d_1, (misurato parallelamente all'asse neutro x, a partire dal centro di torsione O_t) della risultante $\bar{T}$ delle azioni tangenziali distribuite secondo le (13). È opportuno notare che i soli elementi della distribuzione (13), i quali compaiono nel secondo membro della (26), sono la lunghezza δ, [già a suo luogo definita e precisata a proposito della seconda delle (16)], e la direzione dell'asse neutro x, la quale *implicitamente* compare nel momento d'inerzia I_x, e nella misura dell'ascissa $(x_{vt} + \delta)$ e dell'ordinata y_{wt}; tutti gli altri elementi, e cioè: ellisse centrale d'inerzia della sezione, volumi V e $\mathcal{V}_{wt}$, baricentri G_{vt} e G_{wt}, di cui x_{vt} ed y_{wt} sono rispettivamente ascissa ed ordinata, per le già riconosciute proprietà invariantive, dipendono esclusivamente dalla forma geometrica e dalle dimensioni della sezione.

Prima di passare a trarre dalla (26) tutte le conseguenze, di cui essa può riuscire feconda, vediamo ora di ricavare un'altra espressione del lavoro mutuo o virtuale esterno, calcolandolo come lavoro delle forze dovute

alla torsione M_t, per gli spostamenti dovuti alla flessione composta, espressa dalle (12) e (13).

Distinguiamo anche qui, come sopra:

1.° *Lavoro sulla base $z = l$, libera e caricata.*

Le σ_z per la torsione sono nulle, e non dànno lavoro.

Gli spostamenti (12) per $z = l$ imprimono alla base la *rotazione*, costante su tutta la base stessa, (e perciò rigida), calcolata nel paragrafo *C*, con la (17ter) e successive; e qui conviene esprimerla nella forma:

$$r = \vartheta = \frac{T_y \delta \cdot l}{m E I_x} .$$

Per effetto di questa rotazione, la coppia torcente M_t compie il lavoro:

$$M_t \vartheta = \frac{M_t T_y \delta \cdot l}{m E I_x} . \tag{27}$$

2.° *Lavoro sulla base $z = 0$, vincolata e soggetta alle reazioni* $-\tau_{yz}$ e $-\tau_{zx}$.

La torsione M_t non provoca tensioni normali σ_z, e perciò è nullo il relativo lavoro.

Resta da computare il lavoro delle reazioni tangenziali $-\tau_{yz}$ e $-\tau_{zx}$ provocate dalla torsione M_t, espresse p. es. secondo le (10), per effetto degli spostamenti u e v espressi dalle (12) per $z = 0$; tale lavoro è ovviamente espresso da:

$$\frac{M_t}{2V} \frac{T_y l}{m E I_x} \int_A \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\partial F}{\partial y} xy \right) dA. \tag{28}$$

Sommando dunque le (27) e (28), si ha:

$$L_e = \frac{M_t T_y l}{m E I_x} \left[\delta + \frac{1}{2V} \int_A \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\partial F}{\partial y} xy \right) dA \right] . \tag{29}$$

Uguagliando ora questo valore con quello di L_i espresso dalla (21), sopprimendo i fattori comuni e riducendo, si ottiene:

$$x_{vt} = \frac{1}{2V} \int_A \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\partial F}{\partial y} xy \right) dA \tag{30}$$

È facile constatare che questa relazione è identicamente soddisfatta.

Invero, se indichiamo con $\mathcal{H}$ la funzione *integranda* al secondo membro, e poniamo:

$$g = \frac{1}{6}(x^3 - 3xy^2) \qquad \left[\text{la cui: } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x\right]$$

abbiamo:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$

Si considerino le ben note identità:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F \frac{\partial g}{\partial x}\right) - F \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(F \frac{\partial g}{\partial y}\right) - F \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

Sottraendo membro a membro ed integrando, si ha:

$$\int_A \mathcal{H} dA = \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(F \frac{\partial g}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(F \frac{\partial g}{\partial y}\right)\right] dA - \int_A F\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) dA .$$

Trasformando il primo integrale a secondo membro mediante la formula di Gauss ed esprimendo le derivate seconde di g, si ha:

$$\int_A \mathcal{H} dA = -\int_s F\left[\frac{\partial g}{\partial x}\cos(nx) - \frac{\partial g}{\partial y}\cos(ny)\right] ds - 2\int_A F \cdot x dA$$

Ma poichè F è nulla sul contorno, l'integrale di linea è nullo, e perciò:

$$\int_A \mathcal{H} dA = -2\int_A F \cdot x dA$$

e questa, tenuta presente la nota espressione di V [ricavata nel paragrafo B, per stabilire la (9)], ci esprime notoriamente che il secondo membro della (30) è precisamente uguale all'ascissa x_{vt} del baricentro G_{vt} del volume V.

Questa constatazione d'identità ci serve quale verifica dell'impostazione di questo problema del lavoro mutuo e dell'esattezza dei calcoli svolti.

Dobbiamo ora riprendere a considerare la (26) per investigare come varî il braccio di leva d_1, da essa espresso, al variare della direzione

dell'asse neutro x, e perciò in relazione con sforzi di taglio $\overline{T}$ (risultanti) agenti in varie direzioni.

Abbiamo visto — nel paragrafo C, — che la «*forma*» della distribuzione di tensioni (13) dipende da due parametri: la direzione dell'asse x e la distanza δ, ascissa negativa della retta r_0, ov'è nulla rot $\overline{\tau}_z$.

I «*tipi*» di distribuzione (13) sono dunque *infiniti a due*; e sappiamo poi che tutti i tagli $\overline{T}$ risultanti corrispondenti ad uno stesso asse neutro x, per varî valori di δ, sono tra loro paralleli.

Per considerare dapprima, - a scopo di facilità, - *una semplice infinità di «tipi»* e d'altra parte per conservare alla ricerca una certa generalità, prendiamo ora in esame quei «tipi» per i quali la retta r_0 passa per un punto R_0, arbitrariamente fissato; investighiamo come varia d_1 per questi «*tipi*» di distribuzione, al variare della direzione dell'asse x.

Ciò posto, $x_{vt} + \delta$ è la proiezione sull'asse x del segmento $G_{vt}R_0$; d'altra parte y_{vt} è la proiezione sull'asse y del segmento OG_{vt} Ne consegue che ciascuno dei termini nella parentesi [ ] della (26) varia secondo un diagramma polare costituito da una circonferenza passante per il polo. Per una nota proprietà geometrica, anche la detta parentesi [ ] varia secondo un diagramma polare, anch'esso costituito da una circonferenza passante per il polo.

[La proprietà qui ricordata si può dimostrare come segue: Siano a e b due grandezze variabili con l'*anomalia* φ secondo le leggi:

$$a = a_0 \cos(\varphi + \alpha) \qquad \text{e} \qquad b = b_0 \cos(\varphi + \beta).$$

Sviluppando i coseni, si ha:

$$a = a_0 \cos\alpha \cdot \cos\varphi - a_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\varphi$$
$$b = b_0 \cos\beta \,.\, \cos\varphi - b_0 \operatorname{sen}\beta \,.\, \operatorname{sen}\varphi.$$

La somma algebrica s delle due grandezze è:

$$s = a + b = (a_0 \cos\alpha + b_0 \cos\beta)\cos\varphi - (a_0 \operatorname{sen}\alpha + b_0 \operatorname{sen}\beta)\operatorname{sen}\varphi,$$

la quale si può mettere sotto la forma:

$$s = s_0 \cos(\varphi + \gamma) = s_0 \cos\gamma \,.\, \cos\varphi - s_0 \operatorname{sen}\gamma \,.\, \operatorname{sen}\varphi$$

ove si ponga:

$$s_0 \cos\gamma = a_0 \cos\alpha + b_0 \cos\beta \qquad \text{e} \qquad s_0 \operatorname{sen}\gamma = a_0 \operatorname{sen}\alpha + b_0 \operatorname{sen}\beta$$

da cui si ricava:

$$s_0^2 = (a_0 \cos\alpha + b_0 \cos\beta)^2 + (a_0 \operatorname{sen}\alpha + b_0 \operatorname{sen}\beta)^2$$

e

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{a_0 \operatorname{sen}\alpha + b_0 \operatorname{sen}\beta}{a_0 \cos\alpha + b_0 \cos\beta} ;$$

la relazione :

$$s = s_0 \cos(\varphi + \gamma)$$

esprime la proprietà da dimostrarsi].

D'altra parte è ben noto dalla statica grafica, (geometria delle masse), che, se ξ ed η sono gli assi principali d'inerzia della sezione, se I_ξ ed I_η sono i momenti d'inerzia rispetto agli stessi assi, e se φ è l'angolo compreso tra l'asse $+\xi$ (fisso) e l'asse $+x$ variabile, si ha :

$$I_x = I_\xi \cos^2\varphi + I_\eta \operatorname{sen}^2\varphi .$$

Ciò posto, il diagramma polare della d_1, con polo nel centro di torsione e con asse polare parallelo a $+\xi$ ha un'equazione polare della *forma* seguente :

$$d_1 = \rho = \frac{\mathcal{C}\cos(\varphi + \alpha)}{I_\xi \cos^2\varphi + I_\eta \operatorname{sen}^2\varphi} . \tag{31}$$

Sviluppando il numeratore, riducendo a forma intera, moltiplicando per ρ e poi introducendo le coordinate cartesiane $\xi = \rho\cos\varphi$ ed $\eta = \rho \operatorname{sen}\varphi$, (con l'origine nel polo O_1), l'equazione (31) del detto diagramma si trasforma in:

$$I_\xi \xi^2 + I_\eta \eta^2 - \mathcal{C}\cos\alpha \,.\, \xi + \mathcal{C}\operatorname{sen}\alpha \,.\, \eta = 0 \tag{32}$$

la quale, secondo quanto è ben noto dalla geometria analitica, rappresenta un'ellisse passante per il polo O_1, omotetica rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione, avente il centro nel punto di coordinate (orientate secondo gli assi principali d'inerzia e con l'origine in O_1) :

$$\xi_{01} = \frac{\mathcal{C}\cos\alpha}{2 I_\xi} \quad ; \quad \eta_{01} = -\frac{\mathcal{C}\operatorname{sen}\alpha}{2 I_\eta} \tag{33}$$

ed i semiassi :

$$a_1 = \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{2}\, I_\xi} \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{I_\xi} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{I_\eta}} \quad \text{e} \quad b_1 = \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{2}\, I_\eta} \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{I_\xi} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{I_\eta}} \tag{34}$$

Il diametro dell'ellisse passante per O_1 è coniugato rispetto alla stessa ellisse della direzione normale al diametro della circonferenza diagramma polare del numeratore della (31), il quale diametro ha sui due assi le proiezioni $\mathcal{C}\cos\alpha$ e $-\mathcal{C}\operatorname{sen}\alpha$.

Il rapporto di omotetia K, per cui si devono moltiplicare le dimensioni dell' ellisse centrale d'inerzia della sezione per ottenere le omologhe dimensioni dell' ellisse (32), diagramma polare di d_1, è espresso da:

$$K^2 = \frac{\mathcal{C}^1 A}{2 I_\xi I_\eta}\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_\xi} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{I_\eta}\right) \tag{35}$$

ove A è l' area della sezione.

Notiamo che la $\mathcal{C}$ è termine del 5.° ordine, e quindi dalla (35) si constata facilmente che K è numero astratto, come deve essere. Dalla stessa (35) si rileva agevolmente che il fattore, per il quale a 2.° membro è moltiplicato $\mathcal{C}^1$, è molto piccolo, in quanto è dell'ordine di grandezza dell'area della sezione divisa per prodotti come $I_\xi^2 I_\eta$ o $I_\xi I_\eta^2$. Questa osservazione verrà utilizzata tra breve.

L' ellisse (32) consente dunque di individuare la posizione delle risultanti $\bar{T}$ delle distribuzioni di $\bar{\tau}_z$ (13), per le quali la retta r_0 passa per il punto fisso assegnato R_0. Infatti, condotto per O_1 un raggio parallelo ad x fino ad incontrare l' ellisse (32) in un punto E, per questo punto si tiri una retta t in direzione coniugata di $O_1 E \parallel x$ rispetto all'ellisse centrale l' inerzia della sezione, e perciò anche rispetto alla stessa ellisse (32), che è omotetica all' altra: la retta t è la linea d' azione della risultante $\bar{T}$ corrispondente all' asse neutro x.

Per una nota proprietà dell' ellisse risulta che al variare di x *le varie rette* t *passano tutte per il punto* C_t, *altro estremo del diametro uscente da* O_1 *nell' ellisse* (32). [Infatti è noto che, data una conica, le rette che da un punto generico della conica proiettano gli estremi di un diametro, hanno direzioni coniugate rispetto alla conica stessa].

Il punto C_t *si può dunque chiamare* CENTRO DI TAGLIO, *corrispondente al punto* R_0, *in quanto per* C_t *passano tutti gli sforzi di taglio* $\bar{T}$ *risultanti di quelle distribuzioni* (13), *le cui rette* r_0 *passano per il punto assegnato* R_0. La lunghezza δ per ciascuna di queste distribuzioni è la proiezione sull' asse x del segmento OR_0; perciò il suo diagramma polare è ancora una circonferenza passante per il polo.

Le coordinate ξ_{1c} ed η_{1c} del centro C_t rispetto ad assi ξ_1 ed η_1 paralleli a quelli principali d' inerzia, ed uscenti dal centro di torsione O_1, sono doppie delle analoghe coordinate (33) del centro dell'ellisse (32), cioè si ha:

$$\xi_{1c} = \frac{\mathcal{C}\cos\alpha}{I_\xi} \quad ; \quad \eta_{1c} = -\frac{\mathcal{C}\operatorname{sen}\alpha}{I_\eta} \tag{36}$$

Indicando con ξ_{r_0} ed η_{r_0} le coordinate di R_0 rispetto agli assi principali d' inerzia, e con ξ_{wt} ed η_{wt} le analoghe coordinate di G_{wt}, le (36) si possono mettere sotto un' altra forma, applicando la (26) col far coincidere

l' asse x, una volta con l' asse ξ, l' altra volta con l' asse η; è chiaro che nei due casi la d, viene rispettivamente a coincidere con ξ_{1c} e con η_{1c}.

Si trova così:

$$\left.\begin{aligned} \xi_{1c} &= \frac{1}{I_\xi}\left[\frac{V}{m+1}(\xi_{vt} \quad \xi_{r0}) - \mathcal{V}_{wt}\,\eta_{wt}\right] \\ \eta_{1c} &= \frac{1}{I_\eta}\left[\frac{V}{m+1}(\eta_{vt} - \eta_{r0}) - \mathcal{V}_{wt}\,\xi_{wt}\right] \end{aligned}\right\}. \tag{37}$$

Queste relazioni dimostrano che tra il punto arbitrario R_0 ed il relativo centro C_t intercede una corrispondenza biunivoca lineare, la quale inoltre è un' omografia affine, in cui sono uniti i punti all' infinito degli assi principali; un terzo punto unito al finito si può ricavare agevolmente dalle (37) con le condizioni $\xi_{1c} = \xi_{r0}$ ed $\eta_{1c} = \eta_{r0}$.

Prendiamo ora in esame alcuni casi particolari notevoli.

Primo tra questi il caso $\delta = 0$, che è quello più comunemente designato nei trattati come *flessione composta* (*pura, senza torsione*). In tal caso il punto R_0 coincide col baricentro O della sezione. Il primo termine nella parentesi [ ] della (26) si semplifica; inoltre è facile riconoscere che per la grande maggioranza delle forme di sezioni che si presentano nelle applicazioni la detta parentesi [ ] della (26) è relativamente molto piccola, e tale è quindi anche la quantità $\mathcal{C}$ (del 5.° ordine), che rappresenta l'*ampiezza massima* del diagramma polare del numeratore della (31); in conseguenza le (36) ci dicono che piccolissima è la distanza del *centro di taglio* C_{t0}, corrispondente ad $R_0 \equiv O$, dal *centro di torsione* O_1. Ciò si può anche riconoscere dalle (37).

Secondo caso particolare degno di nota è quello in cui il lavoro mutuo $L_i = L_e$ sopra calcolato è zero: secondo la (21), in tal caso è $x_{vt} + \delta = 0$, e perciò il punto R_0 coincide col baricentro G_{vt} sopra definito, e la δ è perfettamente individuata per ogni asse x, secondo un ovvio diagramma polare circolare. La parentesi [ ] della (26) contiene solo il secondo termine: come già vedemmo nel primo caso, anche qui il centro di taglio che diremo C_{tv} risulta per lo più vicinissimo al centro di torsione O_1. Si noti poi che il lavoro mutuo è sempre zero, e si ha sempre lo stesso centro C_{tv} per qualunque valore di δ, (o posizione di R_0) quando sia $m = \infty$ $\left(\text{ossia } \frac{1}{m} = 0\right)$; le (37) dànno con grande semplicità le coordinate di C_{tv}, in quanto si annullano i primi termini entro parentesi [ ].

Terzo caso da segnalare è quello in cui C_t coincida col centro di torsione O_1. In tale ipotesi la parentesi [ ] della (26) si deve annullare, e questa condizione basta a determinare il diagramma polare circolare di δ; inoltre le (37) ci dànno le coordinate del punto R_0 corrispondente a questo caso, per $\xi_{1c} = \eta_{1c} = 0$.

Dimostrazione sintetica diretta dell'esistenza del centro di taglio C_{t0} *per* $\delta = 0$ (1.° *caso particolare*).

Indipendentemente dall' investigazione geometrica svolta poco sopra in generale, per R_0 *in posizione qualunque*, si può per il caso della *flessione composta pura* $\delta = 0$, dimostrare direttamente l'esistenza del *centro di taglio* C_{t0}, cioè riconoscere che tutte le risultanti delle azioni tangenziali distribuite secondo le (13) per $\delta = 0$ e per diversi assi neutri x, passano tutte per il punto C_{t0}, le cui coordinate son date dalle (37) [le quali — ricordiamo — sono state dedotte con immediata applicazione della (26)], per $\delta = 0$, e quindi per $\xi_{t0} = \eta_{t0} = 0$.

Richiamiamo dalla (17ter), che per $\delta = 0$, sulla base libera e caricata $z = l$ si ha costantemente $r = 0$ (come già era stato riconosciuto a pag. 8 dell'estratto) del mio già citato lavoro: « *Precisazioni ecc.* », nota [1]).

Questa proprietà è *caratteristica* degli spostamenti (12) per $\delta = 0$.

Tale constatazione occorre e basta per riconoscere che sovrapponendo due o più spostamenti (12), $\delta = 0$, si trova uno spostamento della stessa categoria; perciò un qualunque spostamento (12), $\delta = 0$, si può ottenere come combinazione lineare di due spostamenti pure (12), $\delta = 0$. Ne consegue che anche un qualunque stato di tensione (13), $\delta = 0$, si può ottenere come combinazione lineare di due stati di tensione pure (13), $\delta = 0$. Ciò basta per poter affermare che tutti gli sforzi di taglio $\overline{T}$ risultanti delle distribuzioni di tensione (13), $\delta = 0$ passano per uno stesso punto, il quale deve necessariamente essere il centro C_{t0} dato dalle (37), ed ottenuto come intersezione delle risultanti di due particolari distribuzioni (13), $\delta = 0$.

Resta così direttamente dimostrata l'esistenza del *centro di taglio*, per le distribuzioni (13), $\delta = 0$, (esistenza che *non* è affatto evidente *a priori*).

È opportuno ricordare qui le osservazioni esposte in principio del paragrafo *C*, riguardo a ciò che in proposito dalle distribuzioni (13), $\delta = 0$, è stato stabilito nel mio lavoro « *Precisazioni ecc...* » già citato in nota [1]; ed osservare che appunto i risultati colà ottenuti e qui applicati ci hanno permesso di eseguire la dimostrazione fatta or ora.

Confidiamo che, pur dopo questa dimostrazione diretta, particolarmente semplice e sintetica, e dopo la deduzione immediata delle (37) dalla (26), il lettore voglia e possa ancora riconoscere nell'investigazione geometrica svolta discutendo la (26), con le (31) e seguenti fino alla (36), un innegabile interesse, sia per le leggi di variazione dei bracci di leva d_t, sia specialmente per la successiva generalizzazione del concetto di centro di taglio.

F. — *Considerazioni critiche e riferimenti bibliografici sull' argomento del* CENTRO DI TAGLIO.

Il punto C_{t0} che quì è stato chiamato *centro di taglio corrispondente al baricentro O* (per $\delta = 0$), fu già considerato da varî autori, ma sotto un punto di vista notevolmente diverso, in quanto nessuno di essi considera lo stato di deformazione e tensione più generale da noi studiato con le (12) e (13) per $\delta \neq 0$, nè fa le constatazioni sopra esposte con la (17 ter) e con le relative conseguenze per $\delta = 0$, e neppure la dimostrazione sintetica di esistenza esposta in fine del paragrafo E.

Citiamo in primo luogo ROBERT MAILLART, in alcuni articoli comparsi sulla *Schweizerische Bauzeitung*, in aprile e luglio 1921, in maggio 1922, e particolarmente in quello intitolato « *Der Schubmittelpunkt* » pubblicato sulla stessa Rivista nel marzo 1924. Il MAILLART prende le mosse da alcuni esperimenti di Bach, secondo i quali i ferri a $\sqsubset$ sollecitati a flessione composta secondo un piano di sollecitazione generico, presenterebbero delle tensioni normali σ_z distribuite con una legge *non* lineare. Egli estende ad una sezione di forma qualunque la considerazione della *presunta* anomalia constatata in detti esperimenti, e dimostra che gli sforzi di taglio $\overline{T}$, per i quali *non* si presenta la detta anomalia debbono avere le rette d'azione tutte concorrenti in un punto ch' egli chiama *Schubmittelpunkt* ossia *centro di taglio*. La sua dimostrazione è fondata sull'ammettere che la sovrapposizione di una torsione ad una preesistente sollecitazione a flessione composta, *perturbi* la distribuziane delle tensioni normali σ_z, in modo che queste non varîno più con la legge lineare ben nota, espressa dalla prima delle (13). Gli stessi concetti sono ripresi nell' opera dei FÖPPL già citata nella nota [4]), vol. II, cap. VI, § 78, pag. 121-130, appunto col titolo « *Der Schubmittelpunkt* ». Ivi è riportata la già citata dimostrazione del MAILLART.

Dobbiamo notare che la *pretesa* perturbazione, la quale nelle tensioni normali σ_z dovute alla flessione composta, sarebbe, secondo i citati autori, prodotta da una sollecitazione a torsione, *è in pieno ed aperto contrasto con la rigorosa teoria di* DE SAINT VENANT.

È molto verosimile e probabile che le anomalie riscontrate dal Bach e da altri sperimentatori nel comportamento dei ferri a $\sqsubset$ siano dovute alla locale concentrazione dei carichi impiegati a realizzare le sollecitazioni sperimentali ; tali carichi possono in certe condizioni provocare la flessione *separata* delle « ali » della sezione a $\sqsubset$; d' altra parte non risulta che detti sperimentatori abbiano confrontato risultati ottenuti con diverse distribuzioni di forze esterne, ammettenti una stessa risultante; i risultati probabilmente sarebbero assai diversi, denunciando così la causa delle riscontrate anomalie.

Un momento torcente M_z potrebbe provocare tensioni normali σ_z sol-

tanto quando fosse impedito l'ingobbimento delle sezioni estreme del cilindro: ora nessuno dei suddetti autori nei luoghi citati, precisa se e come supponga di ostacolare tale ingobbimento, nè imposta il calcolo di tale influenza. D'altra parte è noto che con l'impedito ingobbimento non sono più valide le leggi di ripartizione delle $\overline{\tau}_z$ dagli stessi autori ammesse.

La questione delle citate anomalie merita di essere approfondita: ci proponiamo di riprenderla in qualche prossimo lavoro.

Incidentalmente notiamo che nel citato § 78 del II.° volume dell'opera dei Föppl, dopo la detta dimostrazione del Maillart, viene impostata la ricerca della distribuzione delle $\overline{\tau}_z$ dovute al taglio, secondo la prima delle (16), ma ponendo in luogo della seconda di esse: rot $\overline{\tau}_z = 0$, *ciò che è in evidente contrasto con le note condizioni di congruenza.* Inoltre in fine del detto § 78, per dimostrare la coincidenza del *centro di taglio* col *centro di torsione* si fa un ragionamento energetico analogo a quello qui sopra svolto nel paragrafo *E*, ma trascurando il lavoro delle tensioni-reazioni sulla base vincolata $z = 0$, per effetto dell'ingobbimento, (il che equivale a ritenere che l'ingobbimento sia impedito).

Gli stessi argomenti sono trattati, con concetti analoghi anche da C. Weber in due lavori comparsi sulla Zeitschrift fur angewandte Matematik und Mechanik, l'uno nel 1924 dal titolo: « *Biegung und Schub in geraden Balken,* e l'altro nel 1926, « *Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt* ».

Il punto C_{t0} già definito come *centro di taglio* per $\delta = 0$ fu pure considerato, esclusivamente per sezioni aventi un assedi simmetria, da W. J. Duncan, in un opuscolo dal titolo: « *Torsion and Flexure of Cylinders and Tubes* ». (Aeronautical Research Committee Reports and Memoranda N. 1444, febr. 1932, London.).

Nel caso particolarissimo ivi trattato, per ragioni di simmetria è immediatamente evidente che tutte le risultanti di distribuzioni (13) per $\delta = 0$ devono passare per un punto giacente sul detto asse di simmetria, e tale punto viene individuato facilmente con un solo parametro.

Il detto autore propone per tale punto la denominazione di *centro di flessione* (*flexural centre*); noi crediamo più opportuna quella sopra indicata di *centro di taglio,* in quanto la sollecitazione qui considerata è flessione *non* semplice, ma composta, e l'*elemento preponderante* in questo fenomeno è appunto il *taglio,* il quale, non potendo — com'è ben noto — agire da solo, puro, col suo nome indica implicitamente anche la presenza della flessione. D'altra parte la retta parallela all'asse z, contenente tutti i centri C_{t0} per le varie sezioni, si può opportunamente denominare *asse di taglio,* mentre la designazione di *asse di flessione* per essa sarebbe meno opportuna, in quanto notoriamente già usata per indicare una retta del tutto diversa.

L'argomento fu ripreso dal predetto W. J. Duncan, in unione con D. L. Ellis e C. Scruton, in un lavoro dal titolo «*Flexural Centre and Centre*

of Twist of an Elastic Cylinder », comparso in sunto sui già citati Aeron. Res. Comm. Reports and Memoranda, N. 1529 Apr. 1933, London, e pubblicato poi *in extenso* sul *Philosophical Magazine and Journal of Science*, London Vol. XVI, Serie VII, agosto 1933, pag. 201-235.

In questo lavoro *non* viene fatta in modo alcuno una determinazione razionale del detto *centro di taglio* e neppure ne viene dimostrata l'esistenza, in generale, ma a priori *si ammette*, a guisa di postulato, che le risultanti di distribuzioni di $\overline{\tau}_z$ di solo taglio senza torsione, pur agenti in direzioni diverse, passino tutte per uno stesso punto. Nel detto lavoro le condizioni di vincolo *non sono affatto* quelle che vengono ammesse nel problema di De Saint-Venant, e che noi abbiamo qui rigorosamente seguite. I detti autori suppongono che la base del cilindro tenuta fissa sia vincolata rigidamente, o collegata con un esteso corpo elastico avente una certa deformabilità elastica, non ulteriormente precisata, nè facilmente precisabile; in tali condizioni la distribuzione delle tensioni sulla stessa base *non può essere* rigorosamente quella data dalle (13) per $\delta = 0$ e $z = 0$. Immaginando che la base fissa sia rigidamente vincolata, e che la base d'estremità libera sia irrigidita da una specie di capsula indeformabile, sulla quale agisca la forza esterna, i detti autori, applicando il teorema di reciprocità per le due sollecitazioni di torsione pura, e di flessione e taglio senza torsione, riconoscono che in detta ipotesi il centro di taglio coincide col centro di torsione. Per vincoli invece elasticamente poco deformabili i detti autori affermano, *senza rigorosa dimostrazione*, ma solo in base *a ragionamenti qualitativi*, che in tal caso il centro di taglio risulta molto vicino al centro di torsione. Nella parte II. del detto lavoro sono descritti alcuni apparecchi per la determinazione sperimentale dei centri di taglio e di torsione su alcuni modelli di travi: sono descritti i relativi esperimenti e ne sono riportati ed illustrati i risultati; ma solo per sezioni aventi un asse di simmetria (caso già studiato nel precedente, citato lavoro del Duncan, ed il solo in ambi i lavori, che abbia una trattazione razionale).

Un altro, più recente lavoro sullo stesso argomento è quello del D.r Ing. Placido Cicala dal titolo:

« *Il centro di taglio nei solidi cilindrici* » Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. 70 (1934-35), Tomo I dispensa 3.ª, 21 marzo 1935-XIII.

In questo lavoro, prendendo le mosse dagli studi poco sopra citati, si determinano le coordinate del centro di taglio C_{t0} riferite agli assi principali, trovando le risultanti delle $\overline{\tau}_z$ secondo le (13) per $\delta = 0$ e per l'asse neutro x coincidente successivamente con gli assi principali d'inerzia ξ ed η. Ma si deve osservare che *per poter affermare che una forza tagliante generica passante per C_{t0}, produca flessione composta pura (senza torsione), è necessaria la preventiva, esplicita constatazione del fatto che una sollecitazione del tipo* (13), $\delta = 0$, *sia pure con l'asse x coincidente con*

l'uno o con l'altro degli assi principali d'inerzia, NON *produca rotazione r (intorno all'asse z) sulla base libera e caricata* $z = l$.

Tale constatazione, che non esiste negli usuali trattati, nè nei lavori qui citati, invece risulta dalla (17ter) per $\delta = 0$, *ed era già stata fatta nel paragr.* II, *a pag.* 7 ed 8 *(dell'estratto) del mio lavoro « Precisazioni ecc... » citato in nota* [1]).

Le coordinate di C_{t0} calcolate dal CICALA differiscono da quelle date dalle (37) per $\xi_{r0} = \eta_{r0} = 0$, in quanto queste sono riferite all'origine O', mentre quelle del CICALA si riferiscono all'origine O, ed inoltre sono state ricavate coll'introduzione di una speciale funzione χ, definita sul contorno, la quale per noi non è stata necessaria; però nelle due diverse espressioni risultano identici i termini che contengono il fattore $1/(m+1)$.

Il CICALA passa poi ad occuparsi della posizione del *centro di torsione* O_1, ed a proposito delle coordinate di questo, espresse dalla seconda e terza delle (4), osserva:

« *Il baricentro può però cadere fuori della sezione: la posizione anzi-* « *detta obbliga a definere la* Ψ_1 *fuori del contorno della sezione, ciò che* « fisicamente non ha un significato immediato ».

A proposito di questo *significato,* — analitico e geometrico, se non fisico, — occorre richiamare le osservazioni sopra esposte in fine del paragrafo *C.* a proposito delle condizioni di vincolo della base $z = 0$.

Il CICALA successivamente (ed in conseguenza) propone di determinare le coordinate b_1 e $-a_1$ di O_1 rendendo minimo sulla base $z = 0$ l'integrale:

$$\int_A w^2 \, dA \qquad (w \text{ dovuto alla torsione})$$

e giustifica ciò, scrivendo:

« *Ciò può sembrare abbia maggior fondamento logico, quando si pensi* « *che il cilindro soggetto a torsione alle sue estremità si continua ordina-* « *riamente in un solido di maggiore rigidezza, che tende a limitare l'in-* « *gobbimento delle sezioni estreme del cilindro* ».

Si può a questo proposito osservare che con queste considerazioni, analoghe a quelle, già citate, del DUNCAN, riguardo a vincoli rigidi o quasi rigidi, si esce dal rigoroso campo di piena esattezza analitica e meccanica della teoria di DE SAINT VENANT, e conviene richiamare (cosa notoria) che nelle applicazioni tecniche di questa si può, con grandissima approssimazione, prescindere dall'effettiva — incognita — distribuzione delle tensioni (azioni o reazioni) sulle due basi del cilindro, in quanto tale distribuzione fa sentire la sua influenza solo per tratti del cilindro molto corti in adiacenza delle due basi, sicchè per la quasi totalità del cilindro la effettiva distribuzione delle tensioni interne non differisce sensibilmente da quella ricavata dalla rigorosa teoria sopra citata e da noi seguita

Ad ogni modo, dalla condizione

$$\int_A w^2 dA = \text{min.}$$

che notoriamente equivale alle:

$$\int_A wx dA = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_A wy dA = 0,$$

il Cicala trova che, quando sia $m = \infty$ $(1/m = 0)$, il centro di taglio coincide col centro di torsione. Questo risultato s'accorda con le (37), giacchè le due condizioni or ora scritte equivalgono rispettivamente a:

$$\xi_{wt} = 0 \qquad \text{ed} \qquad \eta_{wt} = 0.$$

Conclusione.

Dunque, riepilogando, nel presente lavoro, il programma esposto nel sunto è stato realizzato procedendo ovunque in pieno rigore ed in perfetta armonia con la feconda teoria di De Saint Venant, adottando esattamente le condizioni di vincolo in essa stabilite, e tenendo pure esatto conto (— a tutti gli effetti, anche energetici —) degli ingobbimenti che sulla base vincolata vengono provocati sia dalla torsione pura (1) e (2), sia dalla flessione composta generica (12) e (13).

Vogliamo richiamare l'attenzione degli studiosi, particolarmente: — sulle sintetiche dimostrazioni svolte e sui semplici risultati ottenuti nei paragrafi B e D; — sulle espressioni generali esposte nel paragrafo C a rappresentare flessione, taglio e torsione simultanei; — sul metodo *energetico* (basato sul calcolo del lavoro mutuo) impiegato nel paragrafo E, allo scopo di determinare la posizione della risultante delle forze tangenziali della distribuzione generica (13); — sull'impostazione e soluzione rigorose del problema del centro di taglio, e sulla generalizzazione del relativo concetto, anche per sollecitazioni generiche (13), per $\delta \neq 0$; il tutto ottenuto in pieno rigore, ed evitando le considerazioni qualitative, le ipotesi semiempiriche e le non ben precisate nè giustificate condizioni di vincolo pure usate nei lavori del Duncan.

Ci riserviamo di sviluppare in qualche prossimo lavoro, a titolo d'esempio, calcoli numerici per svariati casi particolari e tipi di sezioni di forma concreta ed applicativa.

Istituto di Scienza delle Costruzioni della R. Università di Napoli, 11 giugno 1937-XV.

Sulla termonatrite vesuviana

Nota del socio corrispondente **E. Quercigh** *e del dott.* **L. Pavone**

(Adunanza del dì 12 giugno 1937 - XV)

Sunto. — Si dimostra che la termonatrite è stata ingiustificatamente considerata, finora, tra i minerali accertati al Vesuvio.

La termonatrite fu ammessa tra i minerali accertati al Vesuvio da Eugenio Scacchi nel 1888 [1]) in seguito all'esame che egli fece di alcune incrostazioni saline bianche, solubili in acqua, rinvenute in quell'anno al Fosso Grande, sulla superficie e negli interstizî della lava del 1859, in una località di difficile accesso ed evidentemente difesa dalle acque.

Tale conclusione fu basata sulle seguenti constatazioni così raggruppate e poste da lui in evidenza:

1) erano presenti solo piccole quantità di cloruri e solfati e non si otteneva sensibile reazione del potassio e dell'ammonio,

2) in una porzione della sostanza i solfati equivalevano a 0.67 % di SO_3,

3) i cloruri determinati su altra porzione corrispondevano a 0.33 % di Cl,

4) pesando sotto forma di carbonato di calcio l'anidride carbonica contenuta in gr. 0.421 del materiale solubile, risultava che essa vi era contenuta nella proporzione del 35.43 %, valore questo che differisce soltanto del 0.05 % da quello teoricamente calcolabile per la termonatrite (35.48 % di CO_2).

Questa soddisfacentissima concordanza numerica fu probabilmente ritenuta così probativa per ammettere che quel materiale fosse costituito da termonatrite, da ritenere superflua ogni ulteriore determinazione chimica e fisica di conferma o controllo, e da trascurare inoltre di tenere nel dovuto conto la constatazione, accennata incidentalmente nella premessa, della presenza di «circa il 29 % di acqua» nel materiale esaminato, percentuale questa che non si può verificare assolutamente nella termonatrite.

È dunque in base alla sola determinazione dell'anidride carbonica totale che fu ammessa l'esistenza della termonatrite al Vesuvio; però se l'analisi chimica potesse bastare senz'altro, tale ammissione si sarebbe potuta fare partendo dai risultati più completi, evidentemente sfuggiti allo Scacchi, che il Beudant pubblicò, fin dal 1832, sull'analisi di un materiale vesu-

---

[1]) E. Scacchi, *Contribuzioni mineralogiche.* Memoria IV. Rend. R. Acc. Scienze fis. e mat. di Napoli, Serie II, Vol. II (1888) pag. 488.

viano [1]) nel quale egli determinò, oltre all'anidride carbonica (34.73 %) anche la « soda » (50.22 %), trovandole in porzioni non molto diverse da quelle teoriche della termonatrite (rispettivamente 35.48 % di CO_2 e 49.99 % di Na_2O).

Il Cathrein [2]) nel riferire sulla termonatrite di E. Scacchi annotò « man vermisst eine Natron- und genauere Wasserbestimmung, welche nach chemischer Trennung der Lavakörnchen vermöge ihrer Unlöslichkeit in Wasser wohl gelungen wäre », ma non fece obiezioni all'ammissione del nuovo rinvenimento di questo minerale. Neppure lo Zambonini, in seguito [3]), dubitò di quella termonatrite e la riportò, poi, nella sua Mineralogia Vesuviana [4]) come una specie accertata per questo giacimento e come tale viene, perciò, generalmente ritenuta [5]).

Al contrario, invece, tale ammissione appare priva di fondamento tanto per la omissione assoluta del controllo di almeno qualcuno dei caratteri fisici, quanto per il mancato indispensabile dosaggio del sodio. Essa non regge neppure come ipotesi per la contraddizione troppo evidente fra l'ottimo accordo che esiste per l'anidride carbonica e la discordanza sulla proporzione dell'acqua, la quale, ammontando nel materiale vesuviano a circa il 29 %, risulta doppia di quella che spetterebbe alla termonatrite (14.53 %).

Non risulta come fu determinata questa percentuale di *acqua*, ma se si considera che non venne prospettata minimamente la possibilità della presenza di bicarbonato sodico, libero o combinato, e se si osserva che l'acqua del natron, rinvenuto da E. Scacchi in queste stesse incrostazioni, fu determinata per perdita di peso al calor rosso, è logico il supporre che tale metodo possa essere stato seguito anche per la supposta termonatrite; in tal caso, però, la diminuzione di peso constatata del 29 % non si può, a priori, attribuire con sicurezza all'acqua soltanto, ma, in via ipotetica, anche alla decomposizione dell'eventuale bicarbonato, libero o no, che avesse potuto trovarsi presente. Se si tiene conto che la perdita complessiva subita dal trona colla calcinazione è teoricamente del 29.65 %, si deve notare subito che, mentre la percentuale d'anidride carbonica delle incrostazioni in parola concorda con quella della termonatrite, la perdita in peso per riscaldamento al calor rosso concorderebbe, invece, con quella del trona.

È evidente, da quanto si è esposto, che il problema della esistenza della termonatrite sulla lava del 1859 si sarebbe potuto, eventualmente, risolvere

---

[1]) F. S. Beudant, *Traité élémentaire de minéralogie*, II Vol., 2.ª ed. (1832) pag. 310.

[2]) A. Cathrein, Zeitschr. f. Kryst. XVIII (1891) pag. 100.

[3]) F. Zambonini, Atti R. Acc. Scienze fis. e mat. di Napoli, Serie II, Vol. XIII (1906) N.° 8 pag. 38.

[4]) F. Zambonini, *Mineralogia Vesuviana*. Atti R. Acc. Scienze fis. e mat. di Napoli, Serie II, Vol. XIV, (1910) N.° 7 pag. 93.

[5]) C. Doelter, Handb. d. Mineralchemie I (1912) pag. 181.
C. Hintze, Handb. d Mineral. Bd. I, 3 (1930) pag. 2774.

oltanto con un riesame, che noi perciò abbiamo eseguito, delle formazioni esuviane in discussione, delle quali esiste fortunatamente nel Museo Mineralogico della R. Università di Napoli qualche campione la di cui indicazione, critta dallo stesso E. Scacchi, è così concepita: « Termonatrite. Vesuvio; ava del 1859 (trovata nel 1888) ». Dei risultati che abbiamo ottenuti diamo onto in questa Nota.

Queste incrostazioni, bianche, cristalline, compatte, solubili in acqua con ieve residuo di frammentini di lava, mostrano chiaramente, all'analisi, di ontenere, in tutte le loro porzioni, anidride carbonica combinata e semiombinata, acqua di cristallizzazione e sodio in prevalenza, con quantità ariabili, ma limitate, di potassio, cloruri, solfati e, talvolta, anche tracce li magnesio.

Il peso specifico, determinato con la sospensione in miscele di tetrabromuro di acetilene e toluolo, risultò di 2.14-2.15, cioè concordante con quello lel trona, mentre la densità della termonatrite è di 1.5-1.6.

La durezza è nettamente superiore a quella del gesso che viene facilnente striato ed inferiore a 3, come nel trona; la termonatrite possiede, nvece, durezza decisamente inferiore a 2.

Al miscroscopio la sostanza, bianca, opaca, opportunamente schiacciata ra due vetrini, risulta costituita da un aggregato, omogeneo all'apparenza, li cristallini allungati, tabulari, trasparenti, privi di inclusioni, che estinguono parallelamente alla direzione di allungamento, secondo la quale si otano pure delle evidenti tracce di sfaldatura. La piccolezza degli individui mpedisce di separarli per ottenere delle misure goniometriche, ma nei casi avorevoli in cui al microscopio si può scorgere il loro contorno, più o meno ompleto, questo appare somigliantissimo a quello che hanno, in tali condizioni, i cristallini tabulari di trona appoggiati su (001), allungati secondo y formati dalla combinazione $\{001\}\{100\}\{\bar{1}11\}$.

La birifrangenza è forte, la direzione di allungamento risulta negativa, li assi ottici formano un grande angolo ed il loro piano è normale alla direzione di allungamento.

La perdita alla calcinazione, determinata in due porzioni, è risultata ispettivamente del 28.84 % e del 29.80 %, valori che confermano quello che u dato in via approssimativa dallo Scacchi.

Due analisi eseguite su porzioni staccate da punti assai diversi del nateriale, determinandovi tanto l'acido carbonico quanto il bicarbonico, l sodio, il potassio, il cloro e l'SO_4, hanno dato i risultati raccolti nella eguente tabella in (I) e (II), accanto ai quali, per comodità di confronto, i riportano i corrispondenti valori teorici calcolati per il trona (III) e per a termonatrite (IV):

	(I)	(II)	(III)	(IV)
CO_2	24.68	23.56	26.54	48.39
HCO_3	27.03	29.22	27.00	——
SO_4	2.24	1.66	——	——
Cl	tr.	0.06	——	——
Na	28 32	20.12	30.53	37.09
K	3.12	1.39	——	——
Mg	tr.	——	——	——
H_2O	14.61 (diff.)	14.99 (diff.)	15.93	14 52
	100.—	100.—	100.—	100.—

Esprimendo complessivamente in anidride carbonica gli acidi carbonico e bicarbonico, si hanno rispettivamente i seguenti valori:

	(I)	(II)	(III)	(IV)	(E. Scacchi)
CO_2	37.44	37.86	39.04	35 48	35.43

Da questi risultati analitici i quali escludono la presenza di termonatrite e dalle altre determinazioni sopra riportate risulta che il composto fondamentale, costituente la più gran parte di queste incrostazioni del 1859, è il trona. Esso può ammontare, nel caso più favorevole, al 92 % circa nel materiale dell'analisi (I) ed a circa 88 % in quello della (II).

Nessun indizio della presenza di termonatrite si può osservare nè al microscopio, nè con tentativi di separazione con opportune miscele di tetrabromuro d'acetilene e toluolo, le quali dovrebbero permettere per lo meno una concentrazione sensibile del monocarbonato nelle porzioni eventualmente più leggere facilmente allontanabili dal trona che ha una densità molto maggiore; invece questo non si verifica affatto. È parimenti esclusa nel nostro materiale l'esistenza del natron il quale possiede caratteristiche inconfondibili e che fu rinvenuto dallo Scacchi solo nelle parti interne della lava ove era protetto dall'alterazione.

Subordinatamente al trona è probabile che, oltre ai cloruri e solfati di sodio e di potassio, si trovi in questo materiale anche la kalicinite (analisi I) della quale però non potè aversi alcun indizio al microscopio e non si potrebbe separare coi liquidi pesanti per la troppo vicinanza del suo peso specifico (2.16 — 2.18) a quello del trona.

Dall'analisi (II) si rileva che esiste un sensibile eccesso di HCO_3 su quello richiesto per formare il trona col sodio ed anche per dare, eventualmente, la ipotetica kalicinite col potassio, ciò fa ritenere verosimile l'esistenza, qui, di subordinate quantità di nahcolite, già segnalata al Vesuvio

la uno di noi [1]): la sua ricerca non riuscì al microscopio e nemmeno una separazione in base alla differenza di densità che è troppo piccola, ma l'analisi è significativa al riguardo.

Le quantità variabili di cloruri e solfati, che si riscontrano nelle diverse parti di queste incrostazioni, possono spiegarci l'abbassamento della percentuale di anidride carbonica totale constatata nel trona impuro, così si osserva che mentre essa ammonterebbe teoricamente a 39.04 nella fase pura, scende a 37.86 nella nostra analisi (II), a 37.14 nella (I) a 35.43 in quella di Scacchi, avvicinandosi così gradatamente al contenuto teorico della termonatrite. Va notato, inoltre, che lo Scacchi accertò nel suo materiale la presenza del natron e non si può escludere che le porzioni scelte per la determinazione dell'anidride carbonica fossero impure del decaidrato, il quale contenendo solo il 15.38 % di CO_2 avrebbe potuto abbassarne notevolmente la percentuale complessiva, anche se presente in piccola quantità.

Stabilito che il nostro materiale è costituito essenzialmente da trona anzichè da termonatrite, è necessario tener presente che esso è rimasto dal 1888 in poi esposto all'aria nel Museo e considerare quindi, se, e quali alterazioni può conseguentemente aver subito: è noto che la termonatrite non è molto stabile, a temperatura ordinaria, soltanto perchè l'umidità e l'anidride carbonica dell'aria agiscono lentamente su di essa trasformandola in nahcolite e trona, secondo le condizioni determinanti l'equilibrio; è noto pure che il trona, benchè alquanto più stabile, può a sua volta alterarsi, per aumento di temperatura, in termonatrite e nahcolite; non è quindi errato il presumere che se una supposta termonatrite avesse potuto mantenersi inalterata rimanendo per decenni al Fosso Grande fino al 1888, avrebbe a maggior ragione potuto conservarsi tale nell'ambiente del Museo Mineralogico, dove il tenore in umidità ed in anidride carbonica dell'aria è certo inferiore a quello del luogo d'origine; viceversa se si fosse trattato, come pare oramai fuori dubbio, di trona, questo minerale nella peggiore ipotesi avrebbe potuto trovare, nell'ambiente della Collezione, delle cause per alterarsi in termonatrite e nahcolite.

D'altra parte va notato che anche al microscopio non si può scorgere, nel materiale studiato, il minimo accenno di alterazione o di pseudomorfosi. Viceversa il natron è facilmente alterabile, e difatti lo Scacchi lo ha constatato « nell'interno della lava » ove evidentemente ha potuto formarsi, per idratazione dell'eventuale carbonato anidro originario, e rimanervi protetto da ogni causa d'alterazione.

Le ricerche di Hill e Bacon [2]) sul sistema $Na_2CO_3 + NaHCO_3 + H_2O$

---

[1]) E. Quercigh, *Sulla presenza della Nahcolite al Vesuvio*, Rend. R. Acc. Scienze fis. e mat. di Napoli, Serie IV, Vol. VI (1937) pag. 19.

[2]) A. E. Hill, L. R. Bacon, Journ. Am. Chem. Soc. XLIX (1927) pag. 2487.

spiegano chiaramente i fatti osservati, le obiezioni sollevate e le conclusioni alle quali siamo giunti.

Stabilito che non si può ammettere come provata l'esistenza della termonatrite nelle incrostazioni della lava del 1859 è opportuno esaminare se è giustificato ammettere che questo minerale sia stato finora accertato in altre formazioni vesuviane.

Prescindendo necessariamente dai numerosi autori che hanno osservato l'esistenza di carbonati alcalini, prevalentemente sodici, senza attribuirli alla termonatrite o almeno dare i ragguagli indispensabili per una postuma identificazione, troviamo nella letteratura, oltre a quello di E. Scacchi, due soli riferimenti a questo minerale.

Il primo è quello, già ricordato, del Beudant (l. c.) che si fonda sopra l'analisi da lui eseguita che riportiamo nella tabella seguente in (I), mentre in (II) sono calcolate le percentuali reali, ottenute astraendo dalle sostanze estranee, le quali ammontavano al 7 [1]) o all'8%, ed in (III) i valori teorici per la termonatrite:

	(I)	(II)	(III)
CO_2	32.3	34.73	35.48
Na_2O	46.7	50.22	49.99
H_2O	14.0	15.05	14.53
SO_3	tr.	— —	— —
NaCl	2.7	— —	— —
Sostanze terrose	5.3	— —	— —
	101.—	100.—	100 —

Questi dati analitici sono senza dubbio assai probativi per quanto riguarda la composizione del suo materiale, in buon accordo coll'ipotesi che si tratti del monoidrato, tanto più se si pensa che non possono aversi miscele, fra i carbonati od idrocarbonati noti, in cui coesistano quelle proporzioni di Na_2O, di CO_2 e di H_2O. Ma si deve constatare, però, che manca nel Beudant qualsiasi altra notizia intorno a questa termonatrite.

[1]) Siccome in questa analisi la somma dei componenti ammonta 101.0, mentre in tutte le altre che il Beudant riporta per il suo « natron », equivalente al monoidrato, essa è sempre esattamente di 100.0, (perchè con tutta probabilità l'acqua fu dedotta per differenza) si può qui pensare ad un errore di stampa; ma le cifre date per l'anidride carbonica, la soda e l'acqua, si possono controllare coi valori che l'autore dà per l'ossigeno corrispondente, e risultano esatte, quindi se c'è errore di stampa esso può influenzare soltanto la percentuale del cloruro di sodio o delle sostanze terrose (cioè complessivamente delle materie estranee) che diverrebbe di 7 anzichè di 8, ma i dati analitici del Beudant riguardanti i componenti della termonatrite sono sicuri e così anche le percentuali reali che da essi abbiamo calcolate.

Particolarmente decisiva, per impedirci di accettare questa analisi come una prova dell'avvenuta constatazione della termonatrite al Vesuvio, è l'assenza di ogni indizio che il materiale non abbia subito alterazioni durante il periodo di tempo impiegato, in quell'epoca, per arrivare dal Vesuvio al Beudant, essendo più che giustificato il dubbio che possa trattarsi appunto di un prodotto di alterazione verificatasi dopo la raccolta.

È ovvio che quando si tratta di composti derivabili dalla facile alterazione di altri, come è il caso della termonatrite, la quale potrebbe trarre origine tanto dal decaidrato che dall'eptaidrato per opportuno sfiorimento od anche formarsi dal carbonato anidro come primo prodotto di idratazione, oppure derivare dalla scomposizione del trona o del bicarbonato sodico, è indispensabile che la raccolta e la conservazione sia fatta colle dovute cautele e che ad esse si accenni onde eliminare ogni dubbio se, durante l'intervallo passato tra la raccolta e lo studio, non siano intervenute delle cause alteranti, affinchè rimanga accertato che le ricerche di laboratorio possono realmente stabilire la natura del materiale qual'era nel suo giacimento e non quella di un prodotto di successiva trasformazione. Questa esclusione della suddetta termonatrite del Beudant è appoggiata indirettamente da lui stesso che nelle pagine successive (pag. 314) avverte: « Il n'est pas inutile de remarquer que parmi les échantillons que je me suis procuré chez les marchands, lorsque je me suis occupé de l'étude des carbonates de soude, il s'est trouvé du sulfate de soude et du Borax en petits cristaux groupés. Il est probable qu'il existe de pareilles erreurs dans les collections ».

La termonatrite vesuviana analizzata dal Beudant non si può quindi accettare come minerale originario non esistendo alcuna indicazione rassicurante a tale proposito, non solo, ma anche la sicurezza della provenienza è basata soltanto sulla parola dei mercanti che gli fornirono il materiale.

L'altra termonatrite segnalata al Vesuvio è quella a cui accenna lo Zambonini nel descrivere il trona rinvenuto fra i prodotti dell'eruzione vesuviana del 1906 (l. c.).

Accettando, evidentemente senza discussione, l'opinione corrente sulle incrostazioni del 1859, egli non fece alcuna ricerca per stabilirne la vera natura, limitandosi a riconoscerne l'identità esteriore con quel materiale ed a constatarvi un analogo inquinamento di cloruri e solfati alcalini.

Se egli avesse eseguito qualche controllo sulla supposta termonatrite ne avrebbe senza dubbio comunicati i risultati, tanto allora, che, in seguito, nella sua Mineralogia Vesuviana; si trattò quindi, dell'ammissione di questa specie, che ha in verità apparenza così poco caratteristica, col semplice esame superficiale, sulla sola base dell'identità che manifestava all'aspetto esterno colla supposta termonatrite del 1859.

Siccome quest'ultima era, invece, come risulta da quanto abbiamo detto effettivamente del trona, tale identità di caratteri esterni indurrebbe a supporre che proprio di trona si trattasse anche nel materiale di Zambonini.

Un appoggio a questa ipotesi si trova nel fatto che precisamente in questi campioni, cioè nella supposta termonatrite, egli ha trovato i cristallini di trona che ha potuto studiare dimostrandone per la prima volta l'esistenza al Vesuvio. Disgraziatamente il materiale del 1906 studiato da Zambonini non si è rinvenuto finora in queste Collezioni e quindi un controllo diretto non è possibile.

Da quanto si è detto appare nondimeno logicamente probabile che esse fossero in realtà costituite da trona, con impurezze di solfati e cloruri; quindi le porzioni più compatte e meno distintamente cristallizzate furono attribuite senz'altro alla termonatrite per l'identità di apparenza con le incrostazioni del 1859, mentre quelle ove i cristalli avevano potuto svilupparsi sufficientemente in modo da poter formare oggetto di un esame cristallografico ed ottico, furono studiate e ne fu definita con sicurezza la loro natura. Ma, in ogni caso, se questa è una semplice ipotesi, rimane invece accertato il fatto della mancanza di qualsiasi prova per ammettere in quel materiale l'esistenza della termonatrite.

Questo minerale si sarà formato, con tutta probabilità, molte volte al Vesuvio nel processo reversibile di idratazione del Na_2CO_3 e di disidratazione degli idrati, come pure nell'alterazione eventuale del trona o del bicarbonato sodico, ma finora l'unico indizio del suo rinvenimento potrebbe essere costituito soltanto dall'antica analisi di Beudant, se il modo con cui egli si procurò il materiale non rendesse più che giustificate le riserve sulla effettiva corrispondenza del prodotto da lui analizzato a quello originariamente raccolto, ed anche sulla stessa località di provenienza; manca perciò, in conclusione, ogni fondamento per accogliere la termonatrite fra i minerali accertati al Vesuvio.

Istituto di Mineralogia della R. Università di Napoli.

Campagna geofisica vesuviana eseguita dall'Istituto di geodesia della R. Università di Padova nel 1934 35

Memoria del prof. sen. **Emanuele Soler**

(presentata nell'adunanza del dì 5 dicembre 1936 - XV
per essere inserita nel volume I della 3. serie degli Atti)

Sunto. — L'A. dà relazione delle operazioni geofisiche e gravimetriche, eseguite nel 1934-35 dall'Istituto di Geodesia della R. Università di Padova, nella zona costiera vesuviana e nei Campi Flegrei.

Nella prima furono eseguite, nel periodo indicato, N. 67 stazioni eötvössiane, le quali interessano la zona che da Portici prosegue lungo la costa e risale poi verso Ottaviano. Dalle dette osservazioni e da quelle gravimetriche pendolari è risultato un massimo di deficienza sottostante tra Trecase e Boscoreale; deficienza che dà la induzione della probabile direzione del condotto interno vesuviano.

Dalle operazioni gravimetriche pendolari nei Campi Flegrei è risultato, conformemente a quanto avviene in altri distretti vulcanici, un addensamento uniforme di masse sottostanti pesanti.

Ricerche oceanografiche compiute nel Mar Piccolo, nel Mar Grande e nel Golfo di Taranto durante il triennio 1932-34.

Memoria del prof. dott. **Attilio Cerruti**

(presentata nell'adunanza del dì 1. maggio 1937 - XV
per essere inserita nel volume I della 3. serie degli Atti)

Sunto. — I dati oceanografici raccolti nel triennio 1932-34, in oltre duecento stazioni, nel Mar Piccolo, nel Mar Grande ed in un tratto del Golfo di Taranto prossimo alle isole Cheradi, a varie profondità, e riguardanti temperatura, densità, salinità, contenuto in ossigeno, concentrazione degli joni d'idrogeno, trasparenza etc, hanno fornito un buon contributo per la conoscenza di un tratto del Mar Jonio rispetto al quale si possedevano solo poche notizie e non sempre attendibili.

Molta cura è stata data alla scelta della tecnica usata ed al controllo degli istrumenti. Uno speciale capitolo è stato destinato all'esame dei metodi adoperati per la determinazione delle densità. Si son riportati anche molti dati meteorologici e non mancano cenni sul plankton.

I dati relativi al contenuto in gas hanno mostrato che, durante il periodo caldo dell'anno, sul fondo del Mar Piccolo vi è notevole scarsezza di ossigeno. I risultati ottenuti son posti in evidenza dai numerosi grafici che accompagnano la memoria.

Processo verbale dell'adunanza del dì 9 gennaio 1937 - XV.

Partecipano all'adunanza i soci ordinari Bakunin, Bottazzi, De Lorenzo (presidente), D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Longo, Pascal E., Signorini ed i soci corrispondenti nazionali Andreoli, Carnera, Colamonico, Colosi e Ricci.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 5 dicembre 1936, che è approvato.

Il socio corrispondente Carnera, tanto in nome proprio che dei soci De Lorenzo e D'Erasmo, legge il rapporto sulla memoria del prof. Emanuele Soler, intitolata *Campagna geofisica vesuviana eseguita dall'Istituto di Geodesia della R. Università di Padova nel 1934-35*, esprimendo la proposta di accoglierla integralmente, per la stampa, nel nuovo volume degli Atti, con l'intesa che le tavole illustrative restano interamente a carico dell'Autore. L'Accademia unanime approva.

Il socio corrispondente Andreoli presenta, per il Rendiconto, una sua nota *Sull'iterazione delle funzioni monotone*.

Il socio Longo presenta ed offre in omaggio il Volume XIII del Bollettino del R. Orto Botanico di Napoli e dell'annessa Stazione sperimentale delle piante officinali, e ne discorre. Il Presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia.

Processo verbale dell'adunanza del dì 6 febbraio 1937 - XV.

Presiede il sen. De Lorenzo. Assistono i soci ordinari Bakunin, Bottazzi, D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Longo, Pascal E., Picone, Pierantoni, Scorza e i soci corrispondenti nazionali Andreoli, Caccioppoli, Carnera, Carrelli, Colamonico, Colosi, Gallucci, Nobile, Quercigh e Ricci.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza del dì 9 gennaio che è approvato. Indi il presidente partecipa con dolore la morte, avvenuta in Roma il 24 gennaio scorso, del socio ordinario senatore Orso Mario Corbino, e ne ricorda brevemente le preminenti doti di scienziato, di maestro e di uomo politico, annunziando che sarà degnamente commemorato in altra adunanza.

Poscia il segretario dà lettura: 1.°) delle Ministeriali relative alle manifestazioni celebrative di carattere intellettuale ed artistico, al voto espresso dall'assemblea del III Congresso nazionale Autori e Scrittori, alla Dignità Imperiale. L'Accademia prende atto;

2.°) della lettera 15 gennaio della R. Accademia d'Italia, relativa al prossimo Convegno Volta. L'Accademia aderisce pienamente al tema proposto, su: « *Lo stato attuale delle conoscenze sulla nutrizione* »;

3.° dei concorsi a premio banditi dalla R. Accademia delle Scienze di Torino, dalla R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, e dal R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere di Milano.

Il segretario annunzia quindi che il 31 gennaio scorso è scaduto il 2.° concorso al premio Gabriele e Ruggiero Torelli e che sono pervenute in tempo utile le domande di due concorrenti, dott. Pietro Buzano da Torino e dott. Enzo Martinelli da Roma. Il presidente nomina la Commissione composta dai soci Pascal Ernesto, Signorini e Caccioppoli, con l'incarico di riferire in una prossima adunanza.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio vengono segnalati il volume pubblicato dalla Università di Sendai, in Giappone, in occasione del 25.° anno d'insegnamento del prof. K. Honda, e la nuova edizione della *Geologia dell'Italia Meridionale* di Giuseppe De Lorenzo. Questi ringrazia il collega prof. D'Erasmo per la cura che ha messo nell'aggiornamento e completamento di tale edizione, ed al tempo stesso rivolge vivi ringraziamenti a S. E. Giordani, il quale volle che il libro fosse pubblicato dalla Società Editrice Politecnica. S. E. Giordani a sua volta dichiara di esser grato al senatore De Lorenzo per aver concesso all'Editrice Politecnica un'opera così importante per la conoscenza geologica dell'Italia Meridionale.

Il socio Pierantoni segnala al presidente come esistano presso la nostra Accademia di Scienze Morali e Politiche due appositi fondi, trasferibili dalla cessata Accademia Pontaniana, per premii d'incoraggiamento a studii di biologia (Fondazione de Mellis e Tenore). Trattandosi di premi per giovani naturalisti, che possono forse sfuggire alla iniziativa dei suddetti Sodalizi, prega di far voti alla detta Accademia perchè voglia provvedere ai bandi corrispondenti a detti premi. L'Accademia approva ed il presidente incarica lo stesso socio Pierantoni, che è segretario della Società Reale, di fare la segnalazione.

Il segretario legge la *Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia durante l'anno 1936 - XIV*, che a norma dello Statuto sarà stampata nel Rendiconto.

Il socio corrispondente Ricci presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo: *Complementi sul calcolo della distribuzione delle tensioni tangenziali in prismi soggetti a torsione e taglio.*

Il socio corrispondente Andreoli presenta, per lo stesso periodico, una sua nota I sulla *Statistica delle variazioni di stato.*

Il socio corrispondente Quercigh presenta, pure per il Rendiconto, una nota *Sulla presenza della nahcolite al Vesuvio.*

Il socio corrispondente Carnera presenta una nota della Dott. M. Viaro riguardante le *Osservazioni meridiane dei pianeti Saturno e Urano eseguite nei mesi di settembre, ottobre e dicembre 1936*, proponendone la inserzione nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Uguale proposta di stampa nel Rendiconto fa il socio Picone per una nota del dott. Carlo Miranda *Sull'inversione della trasformata di Laplace.* L'Accademia approva all'unanimità.

Il socio Diamare partecipa che sabato prossimo, 13 febbraio, alle ore 17,30', avrà luogo, nei locali dell'Università, una commemorazione di Domenico Cirillo, promossa dall'Associazione dei Medici e Naturalisti, ed invita i soci ad assistervi. Il presidente, a nome dei colleghi, ringrazia.

Processo verbale dell'adunanza del dì 6 marzo 1937 - XV.

All'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, partecipano i soci ordinari Bakunin, Bottazzi, D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Longo, Pascal Ernesto, Pierantoni, Signorini e i soci corrispondenti nazionali Andreoli, Carnera, Nobile e Quercigh.

Il segretario dà lettura del processo verbale dell'adunanza 6 febbraio, che viene approvato. Indi comunica i bandi di concorso al premio Luigi Razza e al premio Mario Baratta secondo le norme della Commissione per lo studio e la prevenzione delle grandi calamità istituita presso la R. Accademia Nazionale dei Lincei, e segnala, fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, il volume su *Le malattie infettive degli insetti* del dott. E. Masera, inviato dall'Ente Nazionale Serico.

Il socio Pascal Ernesto offre all'Accademia, insieme con i suoi corsi di lezioni di *Algebra complementare* e di *Calcolo infinitesimale*, una serie di pubblicazioni, riguardanti ricerche filologiche, del compianto suo fratello Carlo, ed una raccolta degli scritti del figlio Alberto, immolatosi a 23 anni fra le gole del Brennero per l'onore d'Italia. Il presidente, a nome dei soci, ringrazia.

Il segretario presenta, a nome del socio Marcolongo, che ne propone l'inserzione nel Rendiconto, una nota della prof. Maria Da Villa dal titolo: *Per la storia della prospettiva. Il « De artificiali Perspectiva » e Jean Pèlerin (Viator).* L'Accademia approva.

Il socio Bottazzi presenta una nota del dott. Donato Miani-Calabrese dal titolo: *Sul metodo di costruzione degli indici di gravità nel campo degli infortuni sul lavoro*, proponendone l'accoglimento nel Rendiconto. L'Accademia unanime approva.

Il socio corrispondente Andreoli presenta, per il medesimo periodico, una sua nota riflettente la *Statistica nelle collettività soggette a rinnovamento.*

Il socio corrispondente Carnera presenta una memoria, destinata alla pubblicazione negli Atti Accademici, del prof. Eugenio Guerrieri dal titolo: *Catalogo di 166 stelle a forte moto proprio.* Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci Carnera, De Lorenzo e Nobile, con l'incarico di riferire in una prossima adunanza.

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 aprile 1937 - XV.

Sono presenti il presidente sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Longo, Pascal Ernesto e Pierantoni, ed i soci corrispondenti nazionali Caccioppoli, Carnera, Carrelli, Colamonico, Gallucci, Nobile, Quercigh e Ricci.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 6 marzo, che è approvato.

Il presidente comunica i ringraziamenti del sen. Salvi, presidente generale della Società Reale, per la parte presa dall'Accademia al recente suo lutto.

Il socio corrispondente Carnera, tanto in nome proprio che dei colleghi De Lorenzo e Nobile, legge la relazione sulla memoria del prof. Eugenio Guerrieri dal titolo *Catalogo di 166 stelle a forte moto proprio*, proponendo che venga accolta per la pubblicazione negli Atti accademici. L'Accademia unanime approva.

Lo stesso socio Carnera presenta, per il Rendiconto, una sua nota sopra *Le variazioni delle latitudini rilevate nell'anno 1936. Risultati provvisori dedotti dalle osservazioni delle Stazioni boreali.*

Il segretario presenta, a nome del socio corrispondente Andreoli, che ne propone l'accoglimento nel Rendiconto, una nota del prof. Guido Barba dal titolo: *Criteri per la costruzione di polinomi definiti*, e un'altra del dott. Tommaso Salvemini *Sui momenti di una variabile casuale somma di variabili dipendenti*. Entrambe vengono accolte all'unanimità dall'Accademia.

Il socio corrispondente Quercigh presenta, per lo stesso periodico, una nota del dott. Gino Bianchini *Su di un'aftitalite cupro-manganesifera vesuviana*. L'Accademia unanime approva.

Il socio corrispondente Caccioppoli, in qualità di relatore della Commissione incaricata di riferire sul secondo concorso al Premio Gabriele e Ruggero Torelli fra i laureati in matematica pura nelle Università Italiane nel quinquennio 1930-1934, legge la relazione della Commissione predetta, la quale è unanime nel proporre che la somma di lire mille disponibile per detto premio venga divisa in parti uguali tra i due concorrenti dottori Pietro Buzano ed Enzo Martinelli. L'Accademia approva all'unanimità tale proposta.

Processo verbale dell'adunanza del dì 1.° maggio 1937 - XV.

Presidenza del sen. De Lorenzo. Assistono i soci ordinari Bakunin, D'Erasmo (segretario), Diamare, Pascal Ernesto, Pierantoni e Signorini, ed i soci corrispondenti nazionali Andreoli, Caccioppoli, Carnera, Gallucci, Nobile, Quercigh e Ricci.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 3 aprile, che è approvato, e segnala, fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, una serie di lavori inviati dall'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris di Torino.

Indi comunica, che il socio corrispondente Carrelli, assente per motivi militari, gli ha fatto pervenire la commemorazione del socio Orso Mario Corbino, che verrà pubblicata, insieme col ritratto, nel Rendiconto accademico.

Il socio D'Erasmo presenta, per gli Atti, una memoria del prof. Attilio Cerruti dal titolo: *Ricerche oceanografiche compiute nel Mar Piccolo, nel Mar Grande e nel Golfo di Taranto durante il triennio 1932-1934.* Il presidente nomina la Commissione composta dai soci De Lorenzo, Pierantoni e D'Erasmo, perchè riferisca in una prossima adunanza.

Il socio Pascal Ernesto presenta una nota del prof. Antonio Colucci riguardante *Teoremi e problemi sulle funzioni iperarmoniche trattati col metodo degli operatori lineari* e un'altra nota, del medesimo autore, *Sulla rappresentazione delle funzioni iperarmoniche a mezzo di armoniche*, proponendo che vengano accolte per la stampa nel Rendiconto. L'Accademia unanime approva.

Il socio corrispondente Quercigh presenta una memoria dei proff. C. Perrier ed A. Bellanca, dal titolo *Aflitalite e Palmierite*, destinata alla pubblicazione negli Atti. Il presidente nomina la commissione De Lorenzo, Bakunin e Quercigh, perchè riferisca su questo lavoro in una successiva tornata.

Il socio corrispondente Caccioppoli presenta una nota del prof. Gianfranco Cimmino *Sulla rappresentazione conforme delle superficie non analitiche dotate di singolarità* e ne propone l'inserzione nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Uguale proposta di accoglimento nel Rendiconto fa il socio corrispondente Andreoli per una nota del prof. Guido Barba dal titolo: *Le trasformazioni di Tschirnausen ed i polinomi definiti.* L'Accademia unanime approva.

Il socio corrispondente Carnera presenta, per il Rendiconto, una sua nota sopra *Il movimento del polo di rotazione della terra dedotto dalle osservazioni delle Stazioni internazionali.*

Processo verbale dell'adunanza del dì 12 giugno 1937 - XV.

Presidenza del sen. De Lorenzo. Sono presenti i soci ordinari Bakunin, Bottazzi, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Pascal Ernesto, Pierantoni, Signorini ed i soci corrispondenti nazionali Andreoli, Carrelli, Carnera, Colamonico, Colosi, Gallucci, Nobile, Pascal Mario e Ricci.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 1.° maggio, che è

approvato. Indi comunica che il concorso al premio accademico sul tema: « *Studio dello spazio funzionale relativo ai polinomi di un dato grado* », scaduto il 31 maggio scorso, è andato deserto, e che al concorso al premio Sementini per memorie di chimica applicata, scaduto il 10 giugno, hanno partecipato, in tempo utile, il dott. Ugo Beretta con un lavoro manoscritto dal titolo: *L'elettrodo ad antimonio per la misura del* P_h ed il dott. Giuseppe Cotroneo con uno studio, pure manoscritto, dal titolo *Lignina e cellulosa nell'attivazione dei carboni*. Il presidente nomina la commissione composta dai soci Bakunin, Giordani e Carrelli, con l'incarico di riferire in una prossima adunanza.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio sono segnalate una nota del socio Longo « *Coltivazione di piante medicinali* », il volume per il cinquantenario delle Officine Breda, e il 1.° fascicolo del *Jornal de Matematica pura e aplicada da Universidade de S. Paulo, Brasil*.

Il socio D'Erasmo, tanto in nome proprio che dei soci De Lorenzo e Pierantoni, legge il rapporto sulla memoria del prof. Attilio Cerruti dal titolo: *Ricerche oceanografiche compiute nel Mar Piccolo, nel Mar Grande e nel Golfo di Taranto durante il triennio 1932-1931*, con la proposta che essa venga pubblicata nel volume degli Atti e che l'Accademia contribuisca alle relative illustrazioni con una somma non superiore alle lire mille. L'Accademia approva all'unanimità.

Uguale proposta di inserzione negli Atti fa la commissione composta dai soci De Lorenzo, Bakunin e Quercigh per la memoria « *Aftitalite e Palmierite* » dei proff. C. Perrier e A. Bellanca. L'Accademia unanime approva.

Il segretario presenta, per il Rendiconto, una nota del socio E. Quercigh e del dott. Luigi Pavone « *Sulla termonatrite al Vesuvio* ».

Il segretario presenta, a nome del socio Marcolongo che ne propone la inserzione nel Rendiconto, una seconda nota della prof. Maria Da Villa, dal titolo: *Per la storia della Prospettiva. Il « De artificiali Perspectiva » e Jean Pèlerin (Viator)*. L'Accademia unanime approva.

Il socio corrispondente Ricci presenta, pure per il Rendiconto, una sua nota dal titolo: *Contributo allo studio statico dei cilindri elastici soggetti a torsione, taglio e flessione*.

Opere ed Opuscoli ricevuti in dono dagli autori o dagli editori dal 1. gennaio al 28 ottobre 1937.

L' inserzione nel presente elenco valga come ringraziamento ai donatori.

1. Amodeo F., Argomenti trattati nella scuola matematica napoletana. — Napoli 1934.
2. » » La scienza della Prospettiva nel secolo XVIII, i nuovi indirizzi scientifici che da essa scaturirono, e la ripresa della Geometria descrittiva. — Pavia, 1935.
3. » » Leonardo da Vinci e i suoi tempi (1452 — 2 maggio 1519). — Napoli, 1936.
4. » » Lo sviluppo della prospettiva in Francia nel secolo XVII. — Napoli, 1933.
5. » » Sulla storia della prospettiva. — Napoli, 1933.
6. Anniversary volume, dedicated to Professor Kôtarô Honda on the completion of twenty-five years of his professorship by his friends and pupols. — Sendai, 1936.
7. Association de Volcanologie, Assemblée générale d'Édimbourg, settembre 1936. — Napoli, 1937.
8. Baak Jan Adrianus, Regional petrology of the southern north sea. — Wageningen, 1936.
9. Bakx L. A. J., La Géologie de cascante del Rio et de Valacloche (Espagne). — Leiden, 1935.
10. Beukema T. R. A., De Ontwikkeling van het begrip valentie. — Leiden, 1935
11. Boehmer J. W., Aliphatische isocyanaten en hun omzetting in N. aryl-N'. Alkylurea. — Leiden, 1935.
12. Buchta E., Über ungesättigte Diaryl-γ-laktone und ihre Dissoziation in grüne Radikale. — Erlangen, 1936.
13. Bullettino dell' Orto Botanico della R. Università di Napoli — Tomo XIII. — Napoli, 1936.
14. De' Conno E., Tarsitano L. e Longo L., Il terreno assegnato alla Stazione Sperimentale per le Piante Officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli. — Napoli, 1936.
15. De Lorenzo G., Geologia dell' Italia Meridionale. — Napoli, 1937.
16. Delù F., Studio teorico del movimento di traslazione degli atomi nei gas allo stato cinetico permanente — Formule fondamentali — Applicazioni. — Torino, 1937.
17. den Otter H. P., Derivaten der oxydatieproducten van glycerine. — Leiden, 1936.

18. Derksen J. B. D., Inleiding tot de correlatierekening. — Delft, 1935.
19. de Roy van Zuijdewijn E., Onverzadigde sulfonen. — Delft, 1936.
20. De Sitter Aernout, Fotovisueelee fotometrie van sterren tot $8^m.0$ benoorden $+ 80°$ declinatie. — Leiden, 1936.
21. Drion Edward Frans, On the interpretation of frequency curves in Biology. — Amsterdam, 1936.
22. Drop Jacobus, Explosieve gasreacties bij vermirderden druk. — Leiden, 1936.
23. Favaro Antonio, Alberto Pascal. — Pavia, 1918.
24. Fischer Heinz, Die Lebensgemeinschaft des Donauriedes bei Mertingen. — Augsburg, 1936.
25. Fubini Ghiron Eugenio e Pernier Arnolfo, Circuiti elettrici contenenti raddrizzatori. — Torino, 1936.
26. Gigli A. e Sacerdote Gino, Apparecchio per la misura del tempo di riverberazione. — Torino, 1936.
27. » » » » Il calcolo del potere fonoisolante delle pareti con il metodo del quadripolo. — Torino, 1936.
28. Haantjes Johan, Onderzoekingen betreffende de isotopen van neon en van zuurstof. — Amsterdam, 1936.
29. Hartkamp J. L. L. F., Onderzoekingen over een laesieverschijnsel bij Paramecium caudatum. — Leiden, 1936.
30. Hazebroek Pieter, Het beweeglijk coördinatenstelsel in de Projectieve differentiaalmeetkunde. — Delft, 1936.
31. Hommes Klasina Johanna. De invloed van licht op de ontleding en de opsporing van bloed in verband met gerechtelijk onderzoek. — Leiden, 1936.
32. Hopkins G. H. E., Mosquitoes of the Ethiopian Region. — London, 1936.
33. Keijzer C. J., On variability in east Indian Foraminifera. — Leiden, 1935.
34. Kooy J. M. J. Fr., Theorie der optische activiteit. — Leiden, 1936.
35. Lips L., De continue integraal van Perron. — Amsterdam, 1935.
36. Longo Biagio, Coltivazione di piante medicinali. — Napoli, 1937.
37. » » Relazione per l'anno 1934 sulla Stazione Sperimentale per le Piante Officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli. — Napoli, 1935.
38. » » Relazione per l'anno 1935 sulla Stazione Sperimentale per le Piante Officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli. — Napoli, 1936.
39. Longo Luigi, Contributo alla Storia del R. Orto Botanico di Napoli. — Napoli, 1937.
40. » » Studio chimico mineralogico delle squamette delle foglie di Saxifraga Aizoon Jacq. vivente sulla dolomia. — Napoli, 1936.
41. Lütjeharms Wilhelm Jan, Zur geschichte der Mykologie das XVIII. Jahrhundert. — Gouda, 1936.
42. Marcolongo R., Alberto Pascal (cenno necrologico). — Napoli, 1918.

43. Marcolongo R., Su due opere poco conosciute di Luca Valerio e G. B. della Porta. — Napoli, 1936.
44. » » Studi vinciani — Napoli, 1937.
45. Marfori P. e Susanna V., Ricerche farmacologiche sul Boldo e sulla Canapa Indiana coltivati nella Stazione Sperimentale per le Piante Officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli, fatte nell'Istituto di Farmacologia e Terapia della R. Università di Napoli. — Napoli, 1936.
46. Masera E., Le malattie infettive degli insetti e loro indice bibliografico. — Bologna, 1936.
47. Miranda C., Analisi esistenziale per i problemi relativi alle equazioni dei fenomeni di propagazione. — Roma, 1936.
48. Monna A. F., Het Probleem van Dirichlet. — Gravenhage, 1935.
49. Mumford H. W., A year's progress in solving farm problems of Illinois. — Urbana, Ill., 1935.
50. Nilsson Gerhard, Kometen Erster und Höheren Klasse. — Stockholm, 1936.
51. Pascal A., L'apparecchio polisettore di Tommaso Ceva e una lettera inedita di Guido Grandi. — Pavia, 1915.
52. » » Giovanni Ceva ed il suo carteggio inedito con Vincenzo Viviani. — Milano, 1915.
53. » » Girolamo Saccheri nella vita e nelle opere. — Napoli, 1914.
54. » » Sopra i minori del determinante generalizzato di Scholtz-Hunyady. — Napoli, 1914.
55. » » Sopra una lettera inedita di Girolamo Saccheri. — Venezia, 1914.
56. » » Sui determinanti ottenuti da un altro operando una medesima trasformazione lineare sugli elementi di una o più colonne. — Napoli, 1915.
57. Pascal C., Il libro della Poesia latina per i Licei. — Torino, 1925.
58. » » Poeti Romani (Fedro, Tibullo, Ovidio). — Torino, 1926.
59. » » Studii critici sul Poema di Lucrezio. — Roma, 1903.
60. » » Studia Philologica. — Roma, 1893.
61. » » Studî Romani: I) Il processo degli Scipioni; II) Valerio Anziate e Tito Livio. — Torino, 1896.
62 » » Studî Romani: III) L'esilio di Scipione Africano Maggiore; IV) Il partito dei Gracchi e Scipione Emiliano. — Torino, 1896.
63. » » Studî sugli Scrittori Latini (Ennio, Cicerone, Livio, Orazio, Tibullo). — Torino, 1900.
64. Pascal E., Introduzione al Calcolo Infinitesimale. — Napoli, 1933.
65. » » Lezioni di Algebra Complementare. — Napoli, 1923.
66. Pascal M., Su un problema di inseguimento nello spazio. — Milano, 1936.
67. Penta F. e Longo., L Sulla « reazione della lignina » per la distinzione fra ligniti e litantraci. — Napoli, 1936.
68. Philippi George Theodor, On the nature of Proteins. — Amsterdam, 1936.

69. Picone M., Formule risolutive e condizioni di compatibilità per alcuni problemi di propagazione. — Roma, 1934.
70. » » Recenti contributi dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo al l'analisi quantitativa dei problemi di propagazione. — Roma, 1935-
71. Pop L. J. J., The influence of hydrogen sulphide on growth and metabolism of green Algae. — Delft, 1936.
72. Prud'Homme van Reine Fr. W. J., Versuche über die Konsistenz des Protoplasmas. — Amsterdam, 1935.
73. Rameau J. Th. L. B., Symmetrische Secundaire Diaminen afgeleid van Aethyleendiamine. — Leiden, 1936.
74. Reuhl Elsa, Notes on Metabolis Chauges in the Germination of Seeds. — Amsterdam, 1936.
75. Reuter Johannes, Oriënteerend onderzoek naar de oorzaak van het gedrag van Anopheles maculipennis meigen bij de voedselkeuse. — Leiden, 1936.
76. Robert Johanna Louise, Chloor-en Althoxy-linitrophenyl-(methyl) hydrazinen en Derivaten. — Leiden, 1936.
77. Sacerdote Gino, L'applicazione delle unità M. K. S. elettromagnetiche (Giorgi) nel campo dell'elettroacustica. — Torino, 1936.
78. Schouten Cornelis, Metasomatische Probleme (Mount isa, Rammelsberg, Meggen, Mansfeld und Künstliche verdrängung). — Amsterdam, 1937.
79. Schweizer Adolf, Caramel en humine. — Delft, 1937.
80. Soleri Elvio, Protezione delle canalizzazioni sotterranee contro le corrosioni. — Torino, 1936.
81. Stinzendörfer Hans, Über Mono-und Di-benzoylen-dinaphtylendioxyd. — Erlangen, 1936.
82. Technische Hoogeschool te Delft — Programma der lessen voor het studiejaar 1937-1938. — Delft, 1937.
83. Teunissen P. H., Lyophiele niet Amphotere Bio Kolloiden beschouwd als Electrolyten. — Amsterdam, 1936.
84. Tolleuaar Frits, Bijdrage tot de theorie van de harmonische bovenvelden in asynchrone motoren, in verband met de praetische toepassing van het kruipverschijnsel bij kooionkermotoren. — Delft, 1937.
85. Tunazima N., On Ferromagnetism. — Tokio, 1936.
86. Vallauri G., Equazioni dimensionali e sistemi di unità di misura per l'elettrotecnica. — Torino, 1936.
87. » » Guido Grassi. — Torino, 1936.
88. Van der Berg Pieter, Nitratie van Benzylaniline en derivaten. — Leiden, 1936.
89. Van Deventer A. M., Explosiviteit van koelmedia vlamtrajecten en explosiegebieden. — Leiden, 1936.
90. Van Geldrop W. T. L, Lichamen van algebraische functies bij een volkomen constautenlichaam. — Amsterdam, 1936.
91. Van Herk Gijsbert, Eenige nitkomsten vad de Waarnemingen in de jareu

1931-1933 te equator gedaan voor de verbetering van het declinatiesysteem van Boss. — Rotterdam, 1936.

92. Veldman A. R., De constitutie en de fabricage der phenol-formaldehyd-harsen. — Delft, 1937.
93. Volta Luigi, Giovanni Schiaparelli. — Urbino, 1936.
94. » » I movimenti del mondo Siderale — Torino, 1936.
95. Vreeken W., Het Lineaire Vijfcomplex van rechte lijnen in R. 4 en zijn bundels. — Amsterdam, 1936.
96. Wakkie J. G., Onderzoekingen aan phosphotid-Systemen naar aanleiding van eenige biologische problemen. — Rotterdam, 1936.
97. Warren B. C. S., Monograph of the Genus Erebia. — London, 1936.
98. Weeda Jan, La Géologie de la vallée supérieure du Serio. — Leiden, 1936.
99. Winters J. H. M. Bijdrage tot de opsporing der barbitalen bij het toxicologisch onderzoek. — Leiden, 1936.
100. Zaaijer W. H., De snelheid van de Benzilzuur-Omzetting en van de reactie van Cannizzaro. — Leiden, 1935.
101. Zirkelbach Franz, Zur katalytischen Dehydrierung der Alkohole. — Erlangen, 1936.

INDICE DEL VOLUME

G. D' Erasmo — Relazione sui lavori compiuti dalla R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli durante l'anno 1936 (XIV) . . Pag. 3

G. Andreoli — Sull' iterazione delle funzioni monotone . . . . . » 10

E. Quercigh — Sulla presenza della nahcolite al Vesuvio . . . . . » 19

M. Viaro — Osservazioni meridiane dei pianeti Saturno e Urano eseguite nei mesi di settembre, ottobre e dicembre 1936 . . . . . » 26

C. Miranda — Sull' inversione della trasformata di Laplace . . . . . » 32

G Barba — Criteri per la costruzione di polinomi definiti . . . . . » 36

T. Salvemini — Sui momenti di una variabile casuale somma di variabili dipendenti » 40

G. Bianchini — Su di un' aftitalite cupro-manganesifera vesuviana . . . » 43

A. Colucci — Teoremi e problemi sulle funzioni iperarmoniche trattati col metodo degli operatori lineari . . . . . » 48

A. Colucci — Sulla rappresentazione delle funzioni iperarmoniche a mezzo di armoniche . . . . . » 55

G. Cimmino — Sulla rappresentazione conforme delle superficie non analitiche dotate di singolarità . . . . . » 63

G. Barba — Le trasformazioni di Tschirnausen ed i polinomi definiti . . » 69

G. De Lorenzo — Il sentimento della natura in Leopardi . . . . . » 73

C. L. Ricci — Complementi sul calcolo della distribuzione delle tensioni tangenziali in prismi soggetti a torsione od a taglio. — Speciali avvertenze per i casi di sezioni presentanti punti angolosi (in particolare rettangolari) . . . . . » 94

G. Andreoli — Statistica delle variazioni di stato. . . . . » 108

G. Andreoli — Statistica nelle collettività soggette a rinnovamento . . . » 131

D. Miani-Calabrese — Sul metodo di costruzione degli indici di gravità nel campo degli infortuni sul lavoro . . . . . » 146

M. Da Villa — Per la storia della prospettiva. — Il « De artificiali perspectiva » e Jean Pèlerin (Viator) . . . . . » 157

L. Carnera — Le variazioni delle latitudini rilevate nell'anno 1936. Risultati provvisori dedotti dalle osservazioni delle Stazioni boreali . . » 165

R. Caccioppoli — Relazioue della Commissione giudicatrice del concorso per il quinquennio 1930-34 al premio Gabriele e Ruggiero Torelli. . » 176

A. Carrelli — Commemorazione del socio Orso Mario Corbino . . . . » 178

L. Carnera — Il movimento del polo di rotazione della terra dedotto dalle osservazioni delle stazioni internazionali , ... » 183

M. Da Villa — Per la storia della prospettiva. — Il « De artificiali perspectiva » e Jean Pèlerin (Viator) . . . . . » 200

C. L. Ricci — Contributo allo studio statico dei cilindri elastici soggetti a torsione, taglio e flessione. Precisazione e generalizzazione del concetto di centro di taglio . . . . . » 206

E. Quercigh e L. Pavone — Sulla termonatrite vesuviana . . . . . » 239

E. Soler — Campagna geofisica vesuviana eseguita dall'Istituto di geodesia della R. Università di Padova nel 1934-35. *(Sunto della memoria inserita nel vol. I, serie 3., degli Atti)* . . . . . » 247

A. Cerruti — Ricerche oceanografiche compiute nel Mar Piccolo, nel Mar Grande e nel Golfo di Taranto durante il triennio 1932-34 *(Sunto della memoria inserita nel vol. I, serie 3., degli Atti)* . . . . . pag. 247

Processi verbali delle adunanze del 9 gennaio, 6 febbraio, 6 marzo, 3 aprile, 1. maggio e 12 giugno 1937 . . . . . » 248

Opere ed opuscoli ricevuti in dono dagli autori o dagli editori dal 1. gennaio al 28 ottobre 1937 . . . . . » 254

Indice del volume . . . . . » 259

INDICE

G. D' Erasmo — Relazione sui lavori compiuti dalla R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli durante l'anno 1936 (XIV) . . Pag. 3

G. Andreoli — Sull' iterazione delle funzioni monotone . . . . . » 10

E. Quercigh — Sulla presenza della nahcolite al Vesuvio . . . . . » 19

M. Viaro — Osservazioni meridiane dei pianeti Saturno e Urano eseguite nei mesi di settembre, ottobre e dicembre 1936 . . . . . » 26

C. Miranda — Sull' inversione della trasformata di Laplace . . . . . » 32

G. Barba — Criteri per la costruzione di polinomi definiti . . . . . » 36

T. Salvemini — Sui momenti di una variabile casuale somma di variabili dipendenti » 40

G. Bianchini — Su di un' affitalite cupro-manganesifera vesuviana . . . » 43

A. Colucci — Teoremi e problemi sulle funzioni iperarmoniche trattati col metodo degli operatori lineari . . . . . » 48

A. Colucci — Sulla rappresentazione delle funzioni iperarmoniche a mezzo di armoniche . . . . . » 55

G. Cimmino — Sulla rappresentazione conforme delle superficie non analitiche dotate di singolarità . . . . . » 63

G. Barba — Le trasformazioni di Tschirnausen ed i polinomi definiti . . » 69

G. De Lorenzo — Il sentimento della natura in Leopardi . . . . . » 73

C. L. Ricci — Complementi sul calcolo della distribuzione delle tensioni tangenziali in prismi soggetti a torsione od a taglio. — Speciali avvertenze per i casi di sezioni presentanti punti angolosi (in particolare rettangolari) . . . . . » 94

G. Andreoli — Statistica delle variazioni di stato. . . . . » 108

G. Andreoli — Statistica nelle collettività soggette a rinnovamento . . . » 131

D. Miani-Calabrese — Sul metodo di costruzione degli indici di gravità nel campo degli infortuni sul lavoro . . . . . » 146

M. Da Villa — Per la storia della prospettiva. — Il « De artificiali perspectiva » e Jean Pèlerin (Viator) . . . . . » 157

L. Carnera — Le variazioni delle latitudini rilevate nell'anno 1936. Risultati provvisori dedotti dalle osservazioni delle Stazioni boreali . . » 165

R. Caccioppoli — Relazione della Commissione giudicatrice del concorso per il quinquennio 1930-34 al premio Gabriele e Ruggiero Torelli. . » 176

A. Carrelli — Commemorazione del socio Orso Mario Corbino . . . . » 178

L. Carnera — Il movimento del polo di rotazione della terra dedotto dalle osservazioni delle staz oni internazionali , ... » 183

M. Da Villa — Per la storia della prospettiva. — Il « De artificiali perspectiva » e Jean Pèlerin (Viator) . . . . . » 200

C L. Ricci — Contributo allo studio statico dei cilindri elastici soggetti a torsione, taglio e flessione. Precisazione e generalizzazione del concetto di centro di taglio . . . . . » 206

E Quercigh e L. Pavone — Sulla termonatrite vesuviana . . . . . » 239

E. Soler — Campagna geofisica vesuviana eseguita dall'Istituto di geodesia della R. Università di Padova nel 1934-35. *(Sunto della memoria inserita nel vol. I, serie 3., degli Atti)* . . . . . » 247

A. Cerruti — Ricerche oceanografiche compiute nel Mar Piccolo, nel Mar Grande e nel Golfo di Taranto durante il triennio 1932-34 *(Sunto della memoria inserita nel vol. I, serie 3., degli Atti)* . . . . . » 247

Processi verbali delle adunanze del 9 gennaio, 6 febbraio 6 marzo, 3 aprile, 1. maggio e 12 giugno 1937 . . . . . » 248

Opere ed opuscoli ricevuti in dono dagli autori o dagli editori dal 1. gennaio al 28 ottobre 1937 . . . . . » 254

Indice del volume . . . . . » 259

Redattore responsabile ai termini di legge: prof. U. PIERANTONI